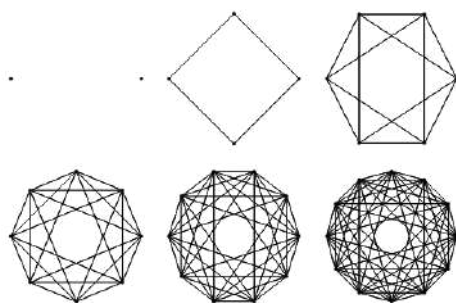




EXERCICES DE MATHS SUP

Une collection.



Mending the sail, Joaquín Sorolla, 1896

Équipe

Jacques Tarr	jacquestarmaths@gmail.com
Victor Kalfon	victor.kalfon@gmail.com
Gabriel Murillo	murillo.gabrielthomas@gmail.com

Remerciements

On aimerait remercier nos professeurs de mathématiques qui nous ont accompagnés pendant nos deux années de prépa, MM. Antoine Pichoff et Guillaume Brevet, ainsi que l'administration de Fermat qui a favorisé nos diverses interventions. On aimerait également remercier M. Nicolas Tosel pour son soutien et son érudition.

Nous adressons de plus une pensée à nos sup. En effet, c'est durant notre année de spé que nous avons commencé à organiser des colles bonus pour celles et ceux voulant s'entraîner en plus des colles déjà incluses dans leur parcours. C'est notamment pour ces colles que nous essayions de trouver des exercices qui sortaient de l'ordinaire, des résultats exotiques et des techniques de calcul intéressantes parfois méconnues. Nous espérons que nos sous-sup (les sup de la MPSI3 actuelle) perpétuerons cette tradition, ayant déjà été conservée cette année.

Nous rappelons que ce document est un travail collaboratif dont chacun des trois auteurs remercie les deux autres. En effet, nous avons tous trois pu apporter notre expérience personnelle et notre propre vision des exercices à cette collection. Notre travail a ainsi bénéficié de cette richesse de points de vue. Et c'est justement là que réside la beauté des mathématiques et ce pour quoi les résultats avancent : considérer le même objet sous des angles différents.

Enfin, on aimerait surtout remercier nos lecteurs ! Sans vous, il n'y a pas trop de raison d'écrire...

EXERCICES DE MATHS SUP

JACQUES J. TARR, VICTOR M. KALFON, GABRIEL T. MURILLO

Utilisation de ce document

Ce que vous avez entre les mains est le résultat d'un an de travail collectif de trois passionnés de mathématiques qui se sont rencontrés pour la première fois, par chance, en MPSI3 au Lycée Pierre de Fermat à la rentrée 2023. Ayant intégré en 2025, nous avons voulu remercier le lycée et ses professeurs d'une façon unique. Ce document est un témoignage de notre reconnaissance envers tous les profs qui nous ont instruits et apporté tant de choses lors de notre scolarité.

Ces exercices viennent des quatre coins du monde. Ils ont été trouvés dans des livres obscurs, des sites internet lointains ainsi que dans des textes célèbres, des TDs d'autres prépas et parfois de nos propres cerveaux. Le document a été rédigé dans le but de pouvoir balayer la quasi-totalité du programme de sup et plus ; son but a évolué dans le temps, mais son rôle final est d'accompagner les élèves qui sortent de leur première année de maths et qui entrent en deuxième année ; trop souvent, les élèves ne savent pas quoi travailler pendant cette longue pause. Voici un texte d'accompagnement !

Chaque énoncé est doté d'icônes, toutes de signification différentes :

- ✓ signifie que l'exercice peut se faire de tête : c'est un exercice d'entraînement plus qu'autre chose.
- ✎ signifie qu'il sera difficile d'y parvenir sans prendre une feuille et un stylo afin de bien poser sa réflexion.
- 💡 signifie que l'exercice nécessite une certaine gymnastique de l'esprit.
- ⭐ signifie que l'exercice est d'une difficulté non négligeable.
- 🎓 indique que l'exercice est classique : il est donc fortement recommandé de savoir le refaire.
- ENS, X, Mines sont des badges qui indiquent la provenance de l'école ; les ENS, Polytechnique et Mines respectivement.
- 💎 signifie que vous êtes face à un vrai bijou mathématique.

On s'est parfois autorisé à enchaîner les icônes ; par exemple, ✓ ✎ signifie un entre-deux en quelque sorte, il peut être fait de tête mais il sera sûrement utile d'écrire, ou bien 🎓 🎓 signifie que l'exercice est particulièrement classique. Il y a seulement 4 exercices à deux étoiles ⭐ ⭐. Nous vous conseillons de traiter en priorité les exercices notés 🎓 et de vous lancer un défi en tentant les exercices ⭐. N'oubliez surtout pas que la difficulté est avant tout une notion extrêmement personnelle !

Un projet équivalent en physique est en cours de discussion. Pour ceux qui passent en MP, ne négligez surtout pas la physique pour les concours, et ne vous laissez pas happer par ce document qui est extrêmement riche et relativement long.

Si vous êtes en prépa, profitez-en ! Prenez un café (ou n'importe quel autre stimulant), un bon ami et travaillez sur les exercices ensemble avec un tableau. La joie de faire des mathématiques émerge bien plus facilement en bonne compagnie.

Pour toute question, ou si vous trouvez des erreurs/coquilles, contacter : jacquestarrmaths@gmail.com, victor.kalfon@gmail.com ou encore murillo.gabrielthomas@gmail.com.

Sommaire

Remerciements	2
Utilisation de ce document	4
Sommaire	6
1. Logique ensembliste, applications entre ensembles	15
1. Quelques ensembles	15
2. Un intervalle	15
3. Composantes connexes de $\mathbb{Q}$	15
4. Cercles et rectangles	15
5. $\mathbb{Q}$ comme produit cartésien	16
6. Formules de De Morgan	16
7. Propositions logiques	16
8. Raisonnements divers	16
9. Injection/Surjection/Bijection	16
10. Bijections entre $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$	17
11. Condition de bijectivité	17
12. Quelques équivalences ensemblistes	17
13. Convergence de suites	17
14. Théorème de Cantor	17
15. Espaces de fonctions	17
16. Irrationalité de e	18
17. Conditions de dénombrabilité	18
18. Premiers pythagoriciens	18
20. Deux équations fonctionnelles	19
21. Une équation diophantienne	19
22. Bijection entre $[0, 1]$ et $]0, 1[$	19
23. Suites arithmético-géométriques (1)	19
2. Techniques de Calcul	20
1. Quelques sommes (1)	20
2. Produits classiques	20
3. Somme de puissances	21
4. Quelques sommes (2)	21
5. Première étude de (H_n)	21
6. Formule de Vandermonde	22
7. Quelques sommes (3)	22
8. Inégalité de Tchebychev	22
9. Contrainte égalitaire	22
10. Un oral d'Ulm	23
11. Un calcul de somme	23
12. La suite (F_n) (1)	23
13. Somme de binomiaux mod m	23
14. Calcul de $\zeta(2)$	24
15. Inégalité de Cauchy-Schwarz	24
16. Transformation d'Abel discrète	24
17. Sommes exotiques	25
18. Un exercice de V. Bayle	25
19. Inversion de Möbius	25
20. Divergence de $\sum \frac{1}{p}$	25
21. "Formule des deux Victors"	26
3. Nombres Complexes	27
1. Formes algébriques	27
2. Formes trigonométriques	27
3. Polynômes de Tchebychev	27

4. Carrés de $\mathbb{N}$	28
5. Quelques systèmes	28
6. Quelques équations complexes	28
7. Quelques sommes trigonométriques	28
8. Une inégalité exotique	28
9. Normes polynomiales	29
10. Identité d'Euler (1)	29
11. Triangles équilatéraux	29
12. Principe de maximum polynomial (1)	29
13. Une somme binomiale	30
14. Identité de Gauss (1)	30
15. Un télescopage?	30
16. Un ensemble complexe	30
17. Carré du plan complexe	30
18. Triangles de $\mathbb{C}$	31
19. Théorème de Tchebychev	31
20. Théorème de Marden	31
4. Calcul matriciel	33
1. Un produit scalaire	33
2. Un produit matriciel	33
3. Théorème de Cayley-Hamilton dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$	33
4. $AB - BA = I_n$	34
5. $\mathbb{C}$ comme sous corps de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (1)	34
6. L'espace $\mathcal{H}$	34
7. $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$	34
8. $Z(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$	34
9. $AB = A + B$	34
10. Somme de matrices inversibles	35
11. Une condition d'inversibilité (1)	35
12. $\mathbb{C}$ comme sous corps de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (2)	35
13. Matrices triangulaires telles que $A^T A = AA^T$	35
14. Matrice de Fourier	35
15. Matrices nilpotentes (1)	35
16. Matrices de permutation	36
17. Suites inter-dépendantes	36
18. Suites arithmético-géométriques (2)	36
19. Image inverse d'une matrice inversible	36
5. Fonctions réelles	37
1. Variations de la fonction W -Lambert	37
2. Composées de fonctions monotones	37
3. Symétries et graphes	37
4. Formules hyperboliques	37
5. Produit hyperbolique	38
6. Un théorème amusant	38
7. Quelques calculs trigonométriques	38
8. Inégalités fondamentales	38
9. Une série trigonométrique	39
10. Aire d'un cercle	39
11. $f \circ f = \text{Id}_{\mathbb{R}}$	39
12. Un calcul intégral	39
13. Produit trigonométrique	39
14. Calcul de produit	40
15. Calcul de $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$	40
16. Somme hyperbolique	40
17. Calcul de $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$	40
18. Inégalité factorielle	40
19. Point fixe de Banach-Picard	41

6. Théorie des groupes	42
1. Un groupe abélien	42
2. LCI $*$ tel que $(\mathcal{P}(E), *)$ soit un groupe	42
3. Intersection et unions de sous groupes	42
4. Groupes ayant un nombre fini de sous groupes	42
5. LCI $(*)$ tel que $(]-1, 1[, *) \cong (\mathbb{R}, +)$	43
6. Théorème de Lagrange	43
7. Isomorphismes	43
8. Caractérisation des sous groupes de $(\mathbb{R}, +)$	43
9. Sous groupe dense de $\mathbb{U}$	44
10. Introduction à $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $SO_n(\mathbb{R})$	44
11. Un sous groupe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$	44
12. Sous groupes distingués	44
13. Sous groupes bornés de $(\mathbb{C}^*, \times)$	44
14. La signature	45
15. Stabilisateurs de parties	45
16. Sous groupes triviaux	45
17. Ordre de $(\mathcal{S}_n, \circ)$	45
18. Centre d'un groupe	45
19. Isomorphisme entre $(\mathbb{Q}, +)$ et $(\mathbb{Q}^*, \times)$	46
20. Sous groupe de $\mathcal{S}_n$	46
21. Noyau d'un morphisme	46
22. Orthogonalité des caractères	46
23. Théorème de décomposition de groupes abéliens	46
24. Théorème des $5/8$	47
25. Premier théorème d'isomorphisme	47
7. Suites	48
1. Quelques suites	48
2. Formule de Dirichlet	48
3. Conditions arithmétiques	48
4. Interpolation finie	49
5. Boucles dans $\mathbb{C}$	49
6. Deux suites entrelacées	49
7. Une suite dense dans $\mathbb{U}$	49
8. Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$	49
9. Suite convexe	50
10. La suite (F_n) (2)	50
11. Limites infimum et supremum	50
12. Suites moyennables	51
13. Lemme de Fekete	51
14. Valeurs d'adhérence	51
15. Complétude	51
16. Une suite qui converge vers π	52
17. Critère de d'Alembert (1)	52
18. Quelques ensembles dénombrables	52
19. Une suite qui vérifie $p u_p$ pour p premier	53
20. Espace complet général	53
21. Valeurs entières de (H_n)	53
22. Un lemme de densité omniprésent	53
8. Arithmétique	54
1. Quelques résultats arithmétiques	54
2. Formule de Legendre	54
3. Petit théorème de Fermat	55
4. Existence d'entiers tels que $2^n \equiv n[p]$	55
5. Théorème d'Erdős-Kalmar	55
6. Identité d'Euler (2)	55
7. Identité de Gauss (2)	56
8. Théorème de Wilson	56

9. Identité d'Euler	56
10. Résidus quadratiques mod p	57
11. Puissances entières	57
12. PGCD de valeurs polynomiales	57
13. Petit théorème de Fermat version matricielle	57
14. Théorème de Bertrand	57
15. Théorème de Kürschák	58
16. IMO 1988 problème 6	58
17. Un exercice de Putnam	58
18. Sous groupes de $\mathbb{U}_n$	59
19. Théorème des restes Chinois	59
20. Nombres premiers de la forme $4n + 3$ et $4n + 1$	59

9. Anneaux et corps 60

1. Principalité de $\mathbb{K}[X]$	60
2. Entiers de Gauss	60
3. Un anneau principal	60
4. Idéaux maximaux	61
5. Initiation aux modules	61
6. Polynômes annulateurs et morphismes de corps	62
7. Factorisation dans un anneau principal	62
8. Éléments algébriques de $\mathbb{R}$	62
9. Un sous anneau de $\mathbb{Q}$	62
10. L'anneau $\text{End}(G)$	63
11. Condition suffisante pour qu'un anneau soit un corps	63
12. Morphismes de corps	63
13. Sous anneaux de $\mathbb{Z}^2$	63
14. Tableau d'un corps	63
15. A -modules (1)	63
16. A -modules (2)	64
17. A -modules (3)	64
18. A -modules (4)	64
19. $1 - ab$ et $1 - ba$	65
20. Racines de l'unité	65

10. Fonctions continues de la variable réelle 66

1. Uniforme continuité sur $\mathbb{R}$	66
2. Théorème de Heine	66
3. Points de continuité	66
4. Suite de racines	67
5. Prolongement d'une fonction uniformément continue	67
6. Majoration affine de fonctions uniformément continues	67
7. Existence de point fixe	67
8. Continuité sur les espaces denses	67
9. Un exercice de Bartho	67
10. Lemme de Riemann-Lebesgue	68
11. Ensembles denses et dénombrables	68
12. Points de continuité de fonctions monotones	68
13. Approximation d'une somme (1)	68
14. CNS sur la densité de l'image d'une fonction périodique	68
15. Théorème de Niven-Parks	69
16. Théorème de Weierstrass	69
17. Quelques limites intéressantes	70
18. Formule de Leibniz	70
19. Carrés continus identiques	71
20. Une fonction horrible	71
21. Dériver un maximum	71
22. Approximation d'une somme (2)	71
23. Taux d'accroissement aux ordres supérieurs	72

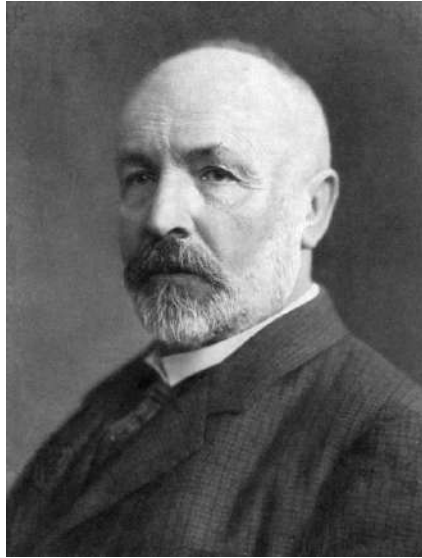
11. Fonctions convexes	73
1. Inégalité de Young	73
2. Inégalité de Jensen et applications	73
3. Une inégalité de produits	74
4. Fonctions convexes bornées sur $\mathbb{R}$	74
5. Inégalité sommatoire	74
6. Inégalité de Jensen intégrale	75
7. Inégalité entropique	75
8. Condition suffisante de convexité	75
9. DL de (H_n) (1)	75
10. Inégalité logarithmique	75
11. $\min(f, g)$, $\max(f, g)$	76
12. Continuité de fonctions convexes	76
13. Extrema de fonctions convexes	76
14. Fonctions convexes croissantes sur $\mathbb{R}$	76
15. Conditions de convexité	76
16. Théorème de Gauss-Lucas	76
17. Ensemble de points de dérivabilité d'une fonction convexe	77
18. Positivité d'une intégrale à poids convexe	77
19. Convexité logarithmique	77
20. Inégalité intégrale	77
12. Polynômes	78
1. Racines de P	78
2. Division euclidienne	78
3. P à racines simples	78
4. Quelques calculs de sommes sur les racines	78
5. L'inégalité $(P')^2 \geq PP''$	79
6. Nombre de Liouville	79
7. L'équation $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$	79
8. L'espace $\mathbb{K}[A]$ pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$	79
9. Une inégalité de pré-image	80
10. Somme de dérivées	80
11. CNS pour que $P \in \mathbb{R}[X]$ soit positif sur $\mathbb{R}$	80
12. Écriture binaire polynomiale	80
13. Inégalité de Cauchy	80
14. Théorème de Pólya	80
15. Barycentre des racines	81
16. Un oral des mines	81
17. Conjugués dans $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$	82
18. Polynômes qui vérifient $P(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$	82
19. Nombres transcendants	82
20. Polynômes réciproques	82
21. Polynômes qui vérifient $P(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$	82
13. Espaces vectoriels et dimensions	83
1. Quelques familles libres	83
2. Quelques espaces vectoriels engendrés	83
3. Formule de Grassmann	83
4. Théorème de Carathéodory	84
5. Un overlap	84
6. L'espace des matrices à trace nulle	84
7. Quelques propriétés de sous espaces vectoriels	84
8. Existence d'espaces vectoriels finis	85
9. Une base célèbre	85
10. Familles libres engendrées par (f_i)	85
11. Espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$	85
12. Non unicité de supplémentaire	85
13. Ensemble de fonctions 1-périodiques	86
14. Rangs pairs et impairs d'une suite	86

15. L'espace des suites arithmétiques complexes	86
16. Un sous espace de $\mathbb{R}^{[-1,1]}$	86
17. Une propriété unique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$	86
18. Application de la formule de Grassmann	86
19. Application dim	87
20. Espaces vectoriels à base unique	87
21. Supplémentaire commun	87
14. Déterminants et groupe symétrique	88
1. Un déterminant de Hurwitz	88
2. Le déterminant comme morphisme	88
3. Sous groupes G de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tels que $G \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) = \{I_n\}$	89
4. Matrices réelles semblables dans $\mathbb{C}$	89
5. Dérangements pairs et impairs	89
6. Un déterminant caché	89
7. Une condition d'inversibilité (2)	89
8. Déterminants de Smith	89
9. Déterminant de Gowers	90
10. Points fixes de permutations $\sigma^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}_n}$	90
11. Sous espaces stables par u_σ	90
12. Étude du groupe alterné $\mathcal{A}_n$	90
13. Polynôme caractéristique	90
14. Positivité d'un déterminant par blocs	91
15. Trace et déterminant de $A \mapsto A^T$	91
16. Matrice compagnon	91
17. Déterminant circulant	91
18. Déterminant de Cauchy	92
19. Un déterminant classique	92
20. Déterminant binomial	92
21. Résultante de deux polynômes	92
15. Endomorphismes	94
1. Diagonalisabilité des projecteurs	94
2. Endomorphismes nilpotents de rangs maximaux	94
3. Théorème de Maschke	95
4. Inversion de Pascal	95
5. Une égalité de projecteurs	95
6. Hyperplans de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$	95
7. Crochet de rang 1	95
8. Automorphisme polynomial	96
9. Interpolation de Bernstein	96
10. Constructions d'un projecteur	96
11. Logique des noyaux et des images	96
12. Condition de codiagonalisabilité	96
13. Noyau et image supplémentaires	97
14. Lemme de factorisation	97
15. Relation entre endomorphismes	97
16. Inégalité de Sylvester	97
17. Caractérisation des homothéties	97
18. Commutativité et noyaux en somme directe	98
19. Un endomorphisme de $\mathbb{C}$	98
20. Endomorphismes cycliques	98
21. Espace vectoriel engendré par les nilpotents	98
16. Espaces euclidiens	100
1. Inégalité de Cauchy-Schwarz	100
2. Endomorphismes symétrique et antisymétrique commutatifs	100
3. Caractérisation des projections orthogonales	101
4. Un produit scalaire discret	101
5. Sous groupes finies de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$	101

6. Quelques inégalités sur les matrices.....	101
7. Vecteurs à angles obtus	101
8. Inégalité d'Hadamard	102
9. Représentation de Riesz	102
10. Un produit scalaire continu	102
11. Le simplexe régulier.....	102
12. Rayon critique de recouvrement par le cross-polytope	103
13. Matrices de rang 1 (1)	103
14. Bases raisonnablement proches	103
15. Distance à X^3	103
16. Étude des endomorphismes adjoints	103
17. Adjoint d'une contraction	104
18. Intégrale de f et $1/f$ unitaire	104
19. Principe de maximum polynomiale (2)	104
20. Théorème de Cartan-Dieudonné.....	104
21. Déterminant de Gram et distance à une partie	105
17. Primitives et équations différentielles	107
1. Résolutions classiques	107
2. Second membre simple	107
3. Modèle de Verhulst.....	107
4. Déterminant différentiel	108
5. L'équation de la MPSI3	108
6. Lemme de Grönwall.....	108
7. $f' + f = o(1)$	108
8. Équations à retard	108
9. Solutions bornées (1).....	109
10. Solutions bornées (2).....	109
11. Initiation au Wronskien	109
12. Quelques primitives.....	109
13. Technique du roi	110
14. Application du lemme des noyaux.....	110
15. Problème inverse.....	110
16. Membre de gauche dépendant.....	111
17. Un système cas classique	111
18. Une identité reconnaissable (1).....	111
19. Une identité reconnaissable (2).....	111
20. Équation différentielle typique.....	111
18. Analyse asymptotique	112
1. Quelques développements	112
2. Un peu plus exotique.....	112
3. $u_n = o(1/n)$	113
4. $\sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$	113
5. Une équation diophantienne.....	113
6. Méthode des petit pas (1).....	113
7. Méthode des petit pas (2).....	113
8. Une suite récursive	113
9. Méthode des petit pas (3).....	114
10. Développement limité de f^{-1}	114
11. Méthode des petit pas (4).....	114
12. Un équivalent simple	114
13. Un exercice exotique	114
14. Points entiers dans le cercle de rayon r	114
15. Déterminer le DL de $\tan$	115
16. Une quasi-identité.....	115
17. Un théorème d'équivalents classique	115
18. Relations logiques.....	115
19. Points entiers de $x + \ln(x)$	115

20. Solutions à l'équation $\tan(x) = x$	115
19. Séries et familles sommables	116
1. Lemme de Dirichlet	116
2. Des contre exemples	116
3. Critère de Raabe-Duhamel	117
4. Critère d'Abel	117
5. Quelques séries (1)	117
6. La série de terme générale $ \cos(n) ^n$	118
7. Une symétrie surprenante	118
8. Somme des inverses des quasi-carrés	118
9. Power trick	118
10. Familles indénombrables	118
11. Critère de d'Alembert (2)	118
12. Quelques séries (2)	119
13. Initiation à la fonction ζ de Riemann	119
14. Un calcul de série	119
15. Un oral des mines	119
16. Série convergente d'une série divergente	119
17. Séries de Dirichlet	120
18. Quelques séries (3)	120
19. Théorème de Riemann	120
20. Critère de Condensation de Cauchy et séries de Bertrand	121
20. Fractions rationnelles, arithmétique des polynômes	122
1. Irréductibilité dans $\mathbb{Q}[X]$	122
2. Un lemme utile (1)	122
3. Lemme de Gauss sur les contenus	122
4. Critère d'Eisenstein	123
5. Division euclidienne de polynômes	123
6. Initiation aux polynômes cyclotomiques	123
7. Une famille de polynômes irréductibles	123
8. Décompositions en éléments simples (1)	124
9. Décomposition en éléments simples (2)	124
10. Polynômes scindés dans $\mathbb{R}$	124
11. Gauss-Lucas (1)	124
12. Gauss-Lucas (2)	124
13. Éléments de $GL_n(\mathbb{Q})$ d'ordre fini	124
14. Racines multiples de P'	125
15. Lemme des noyaux	125
16. Un bon contre exemple	125
17. L'espace $\mathbb{A}[X]$	126
18. Un lemme utile (2)	126
19. $X^n - 1 \wedge X^m - 1$	126
20. Calcul de produit	126
21. Gauss-Lucas (3)	126
22. La suite $P + \frac{1}{n}$	126
21. Intégration	127
1. Borne inférieure d'une intégrale	127
2. Primitives à la Riemann	127
3. Une suite d'intégrales	127
4. Méthode des trapèzes	128
5. Vitesses de convergence	128
6. Deux limites	128
7. Inégalité sur le cercle	128
8. Initiation à la norme infinie	129
9. Inégalité de Hölder	129
10. Inégalité de Minkowski	129
11. Dérivées uniformément bornées	129

12. Comparaison polynomiale	129
13. $\pi^e < e^\pi$	130
14. Inégalités intégrales (1)	130
15. Inégalités intégrales (2)	130
16. Inégalité de Young	130
17. Étude d'une suite	131
18. Fonction β	131
19. Intégrales de Wallis et équivalent de Stirling	131
20. Intégration de deux puissance décalées	131
22. Dénombrement et probabilité	132
1. Parties sans paires	132
2. Événements toujours dépendants	132
3. Inégalité d'indépendance	132
4. Inégalité du train	133
5. Polynômes aléatoires dans $\mathbb{F}_p[X]$	133
6. Marche aléatoire dans $\mathbb{Z}$	133
7. Deux dés pipés	133
8. Déterminant aléatoire	133
9. Merci Bartho!	134
10. Inégalité factorielle	134
11. Ensembles à représentations infinies	134
12. Un théorème d'Erdős	134
13. Nombre de cycles dans les permutations	135
14. Inégalité de Hoeffding	135
15. Formule du crible et application	136
16. Urnes d'Ehrenfest	136
17. Espérance de la norme	136
18. $M_n = \min(X_1, \dots, X_n)$	137
19. Problème du collectionneur	137
20. Nombres de Catalan	137
23. Topologie dans $\mathbb{R}^n$	138
1. Quelques contre exemples	138
2. Complétude et précompacité	138
3. Caractérisation de Borel-Lebesgue	139
4. Idéaux de $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$	139
5. Convexes non bornées de $\mathbb{R}^n$	140
6. Lemme de Riesz	140
7. Courbes de Lissajous	140
8. Ensembles à points isolés	141
9. Relations d'ordre avec l'intérieur et l'adhérence	141
10. CNS pour que E soit complet	141
11. Existences de fonctions exotiques	141
12. Suites d'ouverts non bornées de $\mathbb{R}_+$	142
13. Ouverts de $\mathbb{R}$	142
14. Convexes fermés de $\mathbb{R}^n$	142
15. Caractérisations d'ouverts et de fermés	142
16. L'ensemble des valeurs d'adhérence est un fermé	142
17. Normes équivalentes	142
18. Équivalence des normes en dimension finie	143
19. Topologie dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$	143
20. Lemme de Baire et applications	143
21. Espaces des courbes fractales	144
22. Ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$ tels que $A = \partial\Omega$	145
23. Polynômes scindés à racines simples dans $\mathbb{R}_n[X]$	145
24. L'espace pré-hilbertien $\mathbb{R}[X]$	145



“L’essence des mathématiques, c’est la liberté” - Georg Cantor

1. Logique ensembliste, applications entre ensembles

1. Quelques ensembles. _____ ✓

Déterminer les ensembles suivants:

- $\{x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 = 0\}$
- $\{x \in \mathbb{R}, x^2 - 1 = 0\}$
- $\{x \in \mathbb{Q}, x^2 + 1 = 0\}$
- $\{a^2 + 2, a \in [1, 5]\}$
- $\{x \in \mathbb{Z}, x + 1 = 0\}$
- $\{x \in \mathbb{C}, x^2 + 1 = 0\}$

2. Un intervalle. _____ ✓

Montrer que $\{x \in \mathbb{R}, 1 \leq x + e^x \leq 10\}$ est un intervalle.

3. Composantes connexes de $\mathbb{Q}$. _____ 💡

Montrer que $\mathbb{Q}$ ne contient aucun intervalle.

4. Cercles et rectangles. _____ ✓

Montrer que l’ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 = 1\}$ ne peut pas s’écrire sous la forme d’un produit cartésien de deux intervalles.

5. $\mathbb{Q}$ comme produit cartésien. _____ ✓

Décrire $\mathbb{Q}$ à l'aide d'un produit cartésien et d'un prédicat.

6. Formules de De Morgan. _____ ✓

Soit Ω un ensemble non vide, $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de parties de Ω . Montrer qu'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\overline{\bigcup_{i=0}^n A_i} = \bigcap_{i=0}^n \overline{A_i} \text{ et } \overline{\bigcap_{i=0}^n A_i} = \bigcup_{i=0}^n \overline{A_i}$$

7. Propositions logiques. _____ ✓

Soit P une fonction propositionnelle. Écrire la négation des assertions suivantes:

- $\forall x, P(x)$
- $\exists x, P(x)$
- $\forall x \in E, \exists y \in E, P(x, y)$
- $\exists x \in E, \forall y \in E, P(x, y)$
- $\forall x \in E, \forall y \in E, P(x, y)$
- $\exists r \in \mathbb{R}, \exists s \in \mathbb{R}, x \leq r \text{ et } s \leq r$

8. Raisonnements divers. _____ ✓

- (1) Montrer que si $(x, y) \in]0, 2[\times]-2, 0[, 1/x - 1/y > 1$.
- (2) Soit $x \in \mathbb{R}$ vérifiant $\forall \varepsilon > 0, 0 \leq |x| \leq \varepsilon$. Montrer que $x = 0$.
- (3) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ paire et impaire. Montrer que f est la fonction nulle.
- (4) Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Montrer que $\ln(3)/\ln(2) \notin \mathbb{Q}$.
- (5) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un unique couple $(P, I) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tel que P soit paire et I impaire, vérifiant $f = P + I$.
- (6) Montrer que tout entier naturel supérieur ou égal à 2 peut s'écrire de manière unique comme produit de nombres premiers.

9. Injection/Surjection/Bijection. _____ ✓

Étudier la nature des applications suivantes, et trouver, lorsque c'est possible, les restrictions adéquates qui rendraient les applications surjectives/bijjectives/injectives.

- (1) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x - y, 2x + y)$
- (2) $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*, z \mapsto \exp(z)$
- (3) Soit $n \in \mathbb{N}$. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^n$.
- (4) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x)$

10. Bijections entre $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$. _____

Existe-t-il une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$? Entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$?

11. Condition de bijectivité. _____ ✓

Soit $f : \mathbb{C} \setminus \{i\} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto (z + 2i)/(z - i)$. Trouver $F \subseteq \mathbb{C}$ tel que $f : \mathbb{C} \setminus \{i\} \rightarrow F$ soit bijective.

12. Quelques équivalences ensemblistes. _____ ✓

Soit E, F deux ensembles, $(A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^3$.

- (1) Montrer que $A \cup B \subset A \cup C$ et $A \cap B \subset A \cap C \implies B \subset C$.
- (2) Montrer que $A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C} \iff A \cap B = A \cap C$
- (3) Comparer $\mathcal{P}(E \cup F)$ (resp. $\mathcal{P}(E \cap F)$) à $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$ (resp. $\mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$).

13. Convergence de suites. _____ ✓

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On dit qu'une suite de réelles $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ lorsque:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |a_n - \ell| \leq \varepsilon$$

Les suites suivantes convergent-elles?

- $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$
- $(\alpha^n/n!)_{n \in \mathbb{N}}$
- $(\alpha^n)_{n \in \mathbb{N}}$
- $(\sin(\alpha n))_{n \in \mathbb{N}}$

14. Théorème de Cantor. _____

Soit E un ensemble non vide. Montrer qu'il n'existe jamais une bijection de E dans les parties de E . (On pourrait commencer par traiter le cas lorsque E est fini, puis quand E est infini, $f : E \rightarrow \mathcal{P}(E)$ une bijection et considérer $D = \{x \in E, x \notin f(x)\}$).

15. Espaces de fonctions. _____

Soit $(X_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ une famille d'ensembles. Comparer:

$$\bigcup_{j \in J} \bigcap_{i \in I} X_{i,j} \text{ et } \bigcap_{i \in I} \bigcup_{j \in J} X_{i,j}$$

et montrer l'égalité:

$$\bigcap_{i \in I} \bigcup_{j \in J} X_{i,j} = \bigcup_{\phi \in \mathcal{F}(I,J)} \bigcap_{i \in I} X_{i,\phi(i)}$$

16. Irrationalité de e . _____



Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose:

$$I_n = \int_0^1 e^x x^n dx$$

- (1) Montrer que $I_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.
- (2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(a_n, b_n) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $I_n = a_n e + b_n$.
- (3) En déduire que $e \notin \mathbb{Q}$.

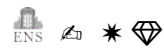
17. Conditions de dénombrabilité. _____



Soit X un ensemble. On dit que X est dénombrable lorsqu'il existe $\varphi : X \rightarrow \mathbb{N}$ bijectif. On note cette relation $X \sim \mathbb{N}$.

- (1) Montrer que si X est infini et qu'il existe $\phi : X \rightarrow \mathbb{N}$ injectif, alors $X \sim \mathbb{N}$.
- (2) Soit $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ des ensembles tel que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $X_i \sim \mathbb{N}$. Montrer que $X_1 \times \dots \times X_n \sim \mathbb{N}$. (On pourra utiliser l'unicité de la décomposition en facteurs premiers des entiers naturels).
- (3) A-t'on $\mathbb{R} \sim \mathbb{N}$? $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$?

18. Premiers pythagoriciens. _____



On souhaite montrer le théorème de Fermat sur les nombres premiers:

Soit p un nombre premier. Alors p peut s'écrire comme la somme de deux carrés si et seulement si $p \equiv 1[4]$ ou $p = 2$.

On suit ici la fameuse démonstration de Don Zagier. On fixe p un nombre premier.

- (1) Traiter le cas $p = 2$.
- (2) Soit E un ensemble fini de cardinal impaire. On dit que $\phi : E \rightarrow E$ est une involution (ou involutif) lorsque pour tout $x \in E$, $(\phi \circ \phi)(x) = x$. Montrer que si ϕ est involutif, alors ϕ admet un point fixe.
- (3) Soit E un ensemble fini et $\phi : E \rightarrow E$ involutif. On suppose que ϕ admet un unique point fixe. Montrer que le cardinal de E est impaire.
- (4) Montrer que si p peut s'écrire comme la somme de deux carrés, alors $p \equiv 1[4]$.
- (5) Soit alors $p > 2$ et $p \equiv 1[4]$. On pose:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{N}^3, p = x^2 + 4yz\}$$

Montrer que $S \neq \emptyset$.

- (6) On pose $\Gamma_1 = \{(x, y, z), x < y - z\}$, $\Gamma_2 = \{(x, y, z) \in S, y - z < x < 2y\}$ et $\Gamma_3 = \{(x, y, z) \in S, x > 2y\}$. Montrer que Γ_1, Γ_2 et Γ_3 définissent alors une partition de S .

(7) On pose alors ϕ l'application définie sur S ainsi :

$$\phi(x, y, z) = \begin{cases} (x + 2z, z, y - x - z) & \text{si } x < y - z \\ (2y - x, y, x - y + z) & \text{si } y - z < x < 2y \\ (x - 2y, x - y + z, y) & \text{si } x > 2y \end{cases}$$

Montrer que ϕ est involutif, que $\phi(\Gamma_1) = \Gamma_3$ et que $\phi(\Gamma_2) = \Gamma_2$. En déduire que ϕ admet un unique point fixe.

(8) Conclure.

Cet exercice a été largement édité pour convenir aux attentes de sup. L'énoncé originale n'était pas aussi complet...

20. Deux équations fonctionnelles. _____ ✓

Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues vérifiant dans un premier temps pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$, puis $f(x + y) = f(x)f(y)$.

21. Une équation diophantienne. _____

On souhaite montrer que l'équation $x^2 - 2y^2 = 1$ admet une infinité de solutions dans $\mathbb{N}^2$.

(1) Montrer qu'il existe deux suites d'entiers naturels $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant:

$$\forall n \in \mathbb{N}, (3 + 2\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$$

(2) Que dire de $(3 - 2\sqrt{2})^n$?

(3) Conclure.

22. Bijection entre $[0, 1]$ et $]0, 1[$. _____

Trouver une bijection entre $]0, 1[$ et $[0, 1]$.

23. Suites arithmético-géométriques (1). _____ ✓

Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}^* \setminus \{1\}) \times \mathbb{R}^*$. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = au_n + b$. On pose $\lambda = b/(1 - a)$.

(1) On pose $v_n = u_n - \lambda$. Quelle est la nature de (v_n) ?

(2) En déduire l'expression de (v_n) et puis celle de (u_n) .



“If people do not believe that mathematics is simple, it is only because they do not realize how complicated life is.” - John Von Neumann

2. Techniques de Calcul

1. Quelques sommes (1). _____ ✓

Calculer les sommes suivantes pour $n \in \mathbb{N}$:

(1) $\sum_{k=0}^n (-1)^k$	(3) $\sum_{k=1}^n 2k$	(5) $\sum_{k=0}^n 2^k$	(7) $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k$
(2) $\sum_{k=2}^{n+1} k$	(4) $\sum_{k=n+1}^{2n} 2k$	(6) $\sum_{k=n+1}^{2n} 2^k$	(8) $\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k}$

2. Produits classiques. _____ ✓

Calculer les produits suivants pour $n \in \mathbb{N}$:

(1) $\prod_{k=-1000}^{1000} (k^2 - k);$	(4) $\prod_{k=n+1}^{2n} k^2;$	(7) $\prod_{k=0}^n 2^k;$	(10) $\prod_{k=1}^n \frac{k+2}{k};$
(2) $\prod_{k=1}^n (2k);$	(5) $\prod_{k=1}^n (2k+1);$	(8) $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right);$	(11) $\prod_{k=1}^n (4k^2 - 1);$
(3) $\prod_{k=1}^n k^2;$	(6) $\prod_{k=0}^n e^{-k};$	(9) $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right);$	(12) $\prod_{k=1}^n (k(n+1-k));$

3. Somme de puissances. ✎

On souhaite montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n de degré $n + 1$ à coefficients dans $\mathbb{Q}$ vérifiant pour tout $m \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^m k^n = P_n(m)$$

- (1) Trouver P_0 et P_1 .
- (2) Montrer que la propriété est vraie par récurrence. *On pourrait considérer la somme:*

$$\sum_{k=0}^m (k+1)^n - k^n$$

- (3) En déduire P_2 et P_3 .

4. Quelques sommes (2). 💡

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les deux sommes suivantes (pour les 3 dernières, on pourra considérer l'application $x \mapsto (1+x)^n$)

(1) $\sum_{1 \leq i, j \leq n} \max(i, j)$	(3) $\sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{i}{i+j}$	(5) $\sum_{1 \leq i, j \leq n} i-j $	(7) $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k$
(2) $\sum_{1 \leq i, j \leq n} \min(i, j)$	(4) $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j}$	(6) $\sum_{i=0}^n \binom{n}{k}$	(8) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{k+1}$

5. Première étude de (H_n) . ✎ 🎓

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

On va montrer que (H_n) diverge de deux manières différentes.

- (1) Montrer que pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$.
- (2) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(n+1) \leq H_n$. Conclure.

Alternativement:

- (3) Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$ une fonction concave sur $\mathbb{R}$ tel que $f(0) = 0$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f(n) \leq \sum_{k=0}^{n-1} f'(k)$$

- (4) En déduire le résultat souhaité.

6. Formule de Vandermonde.



On souhaite montrer la formule de Vandermonde, valable pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}$ et $1 \leq h \leq m + n$:

$$\sum_{k=0}^h \binom{m}{k} \binom{n}{h-k} = \binom{m+n}{h}$$

- (1) Montrer la formule par récurrence.
- (2) On procède maintenant par un raisonnement combinatoire. En considérant un ensemble M de cardinal m et N de cardinal n , compter le nombre de parties de $M \cup N$ de cardinal h de deux manières différentes. Conclure.
- (3) En déduire la valeur de:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$$

7. Quelques sommes (3).



Calculer les sommes suivantes pour $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in [0, 2\pi[$:

$$\begin{array}{llll} (1) \sum_{k=1}^n k \cdot k! & (3) \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) & (5) \sum_{k=0}^n \sin(k\theta) & (7) \sum_{k=0}^n 2^{2k} \binom{n}{k} \\ (2) \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2 - 1} & (4) \sum_{k=0}^n \cos(k\theta) & (6) \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} & (8) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(k\theta) \end{array}$$

8. Inégalité de Tchebychev.



Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1 \leq \dots \leq a_n$ et $b_1 \leq \dots \leq b_n$ $2n$ réels. Montrer l'inégalité suivante, et décrire le cas d'égalité:

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \right) \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n b_k \right) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k b_k$$

9. Contrainte égalitaire.



Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, vérifiant:

$$\sum_{k=1}^n x_k = n \text{ et } \sum_{k=1}^n x_k^2 = n$$

Montrer que pour tout $1 \leq k \leq n$, $x_k = 1$.

10. Un oral d'Ulm.



Préliminaires qui ne sont pas parues à l'oral: Soit $(x_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs. On écrit $(x_n) \in \ell^1(\mathbb{N})$ si la limite suivante existe:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n x_k \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} x_k$$

- (1) Montrer que pour tout $0 \leq r < 1$, la suite $(r^n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N})$.
- (2) Montrer que si $(x_n) \in \ell^1(\mathbb{N})$ et (x_n) est à termes positifs, alors $(x_n^2) \in \ell^1(\mathbb{N})$.
- (3) *L'oral des ENS:* Soit (x_n) une suite de réels positifs tel que $(x_n) \in \ell^1(\mathbb{N})$ et:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_k = A > 0$$

Quelles valeurs peut prendre $\sum_{k=0}^{\infty} x_k^2$?

11. Un calcul de somme.



Montrer la formule de sommation de l'indice du haut:

$$\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$

Et en déduire la valeur de $1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 + \dots + n \times (n+1) \times (n+2)$ et $\sum_{k=1}^n k^3$.

12. La suite (F_n) (1).

On pose $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $F_0 = F_1 = 1$ et pour tout $n \geq 0$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$F_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-k}{k}$$

13. Somme de binomiaux mod m .

Soit $n \in \mathbb{N}$. On souhaite calculer les sommes suivantes:

$$A = \sum_{k \equiv 0[2]} \binom{n}{k} \text{ et } B = \sum_{k \equiv 1[2]} \binom{n}{k}$$

- (1) Calculer $A + B$ et $A - B$, et en déduire leurs valeurs respectives.
- (2) Montrer qu'on peut généraliser l'approche en utilisant des nombres complexes afin de trouver, pour $1 \leq p \leq m$, la valeur de $\sum_{k \equiv p[m]} \binom{n}{k}$.

14. Calcul de $\zeta(2)$.

Notre but est de montrer le résultat suivant, dû à Leonhard Euler:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

(1) Montrer que, pour tout $x \in]0, \pi/2[$:

$$\frac{1}{\tan^2(x)} \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{\sin^2(x)}$$

(2) On pose pour $n \geq 1$ et $1 \leq k \leq 2^n - 1$, $x_k = k\pi/2^{n+1}$. Montrer que:

$$\sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{\sin^2(x_k)} - 2^n + 1 \leq \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{x_k^2} \leq \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{\sin^2(x_k)}$$

(3) On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ S_n la somme à droite de l'inégalité précédente. Après avoir démontré:

$$\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[, \frac{1}{\sin^2(x)} + \frac{1}{\sin^2(\frac{\pi}{2} - x)} = \frac{4}{\sin^2(2x)}$$

Montrer que $S_n = 4S_{n-1} + 2$ pour tout $n \geq 2$.

(4) En utilisant l'exercice 23 du chapitre précédent, en déduire l'expression de (S_n) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(5) Conclure.

15. Inégalité de Cauchy-Schwarz.



Soit $(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{2n}$. On souhaite montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On pose pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$P(t) = \sum_{k=1}^n (a_k - b_k t)^2$$

(1) En raisonnant sur le signe du discriminant de P , montrer que:

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right)$$

(2) Caractériser le cas d'égalité.

16. Transformation d'Abel discrète.



Soit (a_n) et (b_n) deux suites réelles. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose:

$$\bullet S_n = \sum_{k=0}^n a_k b_k \qquad \bullet A_n = \sum_{k=0}^n a_k$$

(1) Montrer que $S_n = A_n b_n + \sum_{k=0}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1})$

(2) En déduire le critère d'Abel : Si (b_n) est décroissant tendant vers 0 et la suite (A_n) est bornée, alors (S_n) converge.

(3) Montrer que pour tout $\theta \in]0, 2\pi[$, la suite suivante converge:

$$S_n(\theta) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin(k\theta)}{k}$$

17. Sommes exotiques. _____   

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \geq 2$, E un ensemble finie tel que $|E| = n$. Calculer les quatre expressions suivantes:

$$(1) \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{a}{2^k}\right) \quad (2) \sum_{A, B \subset E} |A \cap B| \quad (3) \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}^2 \quad (4) \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}^2$$

18. Un exercice de V.Bayle. _____  

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $A \subseteq \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose $P(A) = \prod_{k \in A} k$. Calculer : $\sum_{A \subseteq \llbracket 1, n \rrbracket} \frac{1}{P(A)}$

19. Inversion de Möbius. _____   

On note $\mathcal{Q} = \{n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathcal{P}, p^2 \nmid n\}$ l'ensemble des quadratfrei (qui signifie "sans facteur carré") de $\mathbb{N}$, $\gamma(n) = \{p \in \mathcal{P}, p|n\}$. Finalement, on pose $\mu : \mathbb{N} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ l'application de Moebius:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \notin \mathcal{Q} \\ (-1)^{|\gamma(n)|} & \text{si } n \in \mathcal{Q} \end{cases}$$

- (1) Calculer $\mu(n)$ pour $1 \leq n \leq 10$
- (2) Montrer que:

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- (3) En déduire que, si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont des suites à valeurs réels, alors on a l'équivalence:

$$b_n = \sum_{d|n} a_d \iff a_n = \sum_{d_1 d_2 = n} \mu(d_1) b_{d_2}$$

20. Divergence de $\sum \frac{1}{p}$. _____  

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(p_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ la suite strictement croissante des nombres premiers. On note:

$$P_n = \prod_{k=1}^n \left(\frac{1}{1 - p_k^{-1}} \right)$$

- (1) En développant le produit, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n \geq H_n$, avec (H_n) la suite définie à l'exercice 5. En déduire que la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ diverge.

- (2) En utilisant des inégalités classique, conclure que la suite $(\Gamma_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ diverge, ou pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\Gamma_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{p_k}$$

Ce résultat est du au brillant Leonhard Euler.

21. “Formule des deux Victors”. ✍️

Déterminer une forme explicite de la suite définie par :

$$(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})^{\mathbb{N}^*} : \begin{cases} I_1 : x \mapsto x \ln(x) - x \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, I_{n+1} : x \mapsto \int_0^x I_n(t) dt \end{cases}$$

La formule obtenue s’appelle officieusement la formule des deux Victor, démontrée par Victor Lamarche et Victor Kalfon durant leur année de sup au lycée Pierre de Fermat.



“The greatest advantage in gambling lies in not playing at all.” - Gerolamo Cardano

3. Nombres Complexes

1. Formes algébriques. _____ ✓

Soit $\theta \in [0, 2\pi[$. Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants:

$$(1) \ z = \frac{3+i}{2-5i} \quad (2) \ z = (2+i)^4 \quad (3) \ (1+2i)^5 \quad (4) \ z = 1 - e^{i\theta}$$

2. Formes trigonométriques. _____ ✓

Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes qui suivent (avec a un réel de $]0, \frac{\pi}{2}[$) :

$$(1) \ z_1 = 1 - i \quad (2) \ z_2 = \frac{1}{1+i} \quad (3) \ z_3 = \frac{\sqrt{3}-i}{1+i\sqrt{3}} \quad (4) \ \frac{1+e^{ia}}{1-e^{ia}}$$

3. Polynômes de Tchebychev. _____ ✓🎓

Soit $n \in \mathbb{N}$. Trouver tous les couples de polynômes (P_n, Q_n) à coefficients réels vérifiant pour tout $\theta \in [0, 2\pi[$:

$$P_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta) \text{ et } \sin(\theta)Q_n(\cos(\theta)) = \sin((n+1)\theta)$$

4. Carrés de $\mathbb{N}$. _____

Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tel que les deux peuvent s'écrire comme la somme de deux carrés. Montrer que ab peut également s'écrire comme la somme de deux carrés et $a^n, n \geq 0$ aussi.

5. Quelques systèmes. _____ ✓

Résoudre les systèmes suivants dans $\mathbb{C}^2$:

$$(1) \begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 2 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x + y = 3i \\ xy = -1 - 3i \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x + y = 3 + 4i \\ xy = 5 + 15i \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} x + y = 1 + i \\ xy = 2 \end{cases}$$

6. Quelques équations complexes. _____

(1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$\bullet z^2 + z - (1 + 3i) = 0$$

$$\bullet 1 + \left(\frac{z+i}{z-i}\right) + \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2 + \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^3 = 0$$

$$\bullet (1+z)^{2n} = (1-z)^{2n}, n \in \mathbb{N}$$

(2) Calculer le produit des solutions déterminées et non nulles de cette dernière équation.

7. Quelques sommes trigonométriques. _____

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}$. Sous réserve d'existence, calculer les sommes suivantes :

$$(1) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(x + ky)$$

$$(2) \sum_{k=0}^n \frac{\cos(kx)}{\cos(x)^k}$$

$$(3) \sum_{k=0}^n \frac{\sin(kx)}{\cos(x)^k}$$

$$(4) D_n = \sum_{k=-n}^n e^{ikx}$$

8. Une inégalité exotique. _____ *

Soit $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$. Montrer qu'il existe $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$ tel que:

$$\left| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i z_i \right| \leq \sqrt{2} \max_{1 \leq i \leq n} |z_i|$$

Montrer également qu'il existe $(\delta_1, \dots, \delta_n) \in \{-1, 1\}^n$ tel que:

$$\left| \sum_{i=1}^n \delta_i z_i \right| \geq \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^n |z_i|$$

9. Normes polynomiales.



Pour tout polynôme à coefficients complexes $P \in \mathbb{C}[X]$ on note $\|P\|_2$ la *norme-2* de P :

$$\|P\|_2 = \sqrt{\sum_{i=0}^d |a_i|^2}, \text{ avec } P(X) = \sum_{i=0}^d a_i X^i$$

Montrer que l'on a toujours:

$$\|P\|_2 \leq \sup_{|z|=1} |P(z)|$$

10. Identité d'Euler (1).



On souhaite montrer l'identité d'Euler $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$. On pose $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ l'application qui à θ associe $\cos(\theta) + i \sin(\theta)$. Écrire une équation différentielle vérifiée par f et en déduire le résultat.

11. Triangles équilatéraux.



Soit $(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$. Montrer que (z_1, z_2, z_3) forme un triangle équilatéral si et seulement si l'on a l'égalité $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3$

12. Principe de maximum polynomial (1).



On dit que $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ est ouvert lorsque pour tout $z_0 \in \Omega$, il existe un disque contenant z_0 inclus dans Ω , c'est à dire il existe $\varepsilon > 0$ tel que $D(z_0, \varepsilon) := \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| < \varepsilon\} \subseteq \Omega$. On note $\partial\Omega$ le bord d'Omega:

$$\partial\Omega = \{z \in \mathbb{C}, \forall \varepsilon > 0, D(z, \varepsilon) \cap \overline{\Omega} \neq \emptyset \text{ et } D(z, \varepsilon) \cap \Omega \neq \emptyset\}$$

(1) Montrer que tout disque est ouvert, et expliciter son bord.

(2) Soit P un polynôme à coefficients complexes et Ω un ouvert borné de $\mathbb{C}$. Montrer que:

$$\sup_{z \in \Omega} |P(z)| = \sup_{z \in \partial\Omega} |P(z)|$$

C'est le principe du maximum.

(3) Soit $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{U}^n$. Montrer l'existence d'un $z \in \mathbb{U}$ tel que $\prod_{i=1}^n |z - z_i| = 1$.

13. Une somme binomiale. _____ ✓ ✎

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer:

$$\sum_{p=0}^{2n-1} \binom{4n}{2p+1} (-1)^p$$

14. Identité de Gauss (1). _____ ✎ 🎓 💎

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\varphi(n) = \#\{n \wedge k = 1, 1 \leq k \leq n\}$ la fonction indicatrice d'Euler. Soit $d \in \mathbb{N}^*$.

- (1) Soit $\omega \in \mathbb{U}_d$, avec $\omega = \exp\left(\frac{2\pi i k}{d}\right)$, $1 \leq k \leq d$. À quelle condition sur k a-t-on:

$$\langle \omega \rangle := \{\omega^j, j \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{U}_d$$

- (2) Montrer que l'on a:

$$\mathbb{U}_n = \bigsqcup_{d|n} \mathbb{V}_d, \text{ avec } \mathbb{V}_d := \{\omega \in \mathbb{U}_n, \langle \omega \rangle = \mathbb{U}_d\}$$

(Ici le symbole $\bigsqcup$ signifie que l'union est disjointe)

- (3) En déduire l'identité sommatoire de Gauss:

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n$$

15. Un télescope? _____ ✓ ✎

Soit $n \geq 2$. Simplifier le produit:

$$\prod_{p=2}^n \left(\frac{p^3 - 1}{p^3 + 1} \right)$$

16. Un ensemble complexe. _____ ✓ ✎

On pose $\Gamma = \left\{ z \in \mathbb{C}^*, z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R} \right\}$. Montrer que $\Gamma = \mathbb{R}^* \cup \mathbb{U}$.

17. Carré du plan complexe. _____ ✎

Montrez que les points dont a, b, c et d sont les affixes forment un carré si et seulement si on a :

$$a + c = b + d \text{ et } a + ib = c + id$$

18. Triangles de $\mathbb{C}$. ✎ 💡

Soit ABC un triangle. On construit le point M comme le centre du triangle équilatéral extérieur à ABC dont $[AB]$ est l'un des côtés. De même, on construit N et P à partir respectivement de $[BC]$ et $[CA]$. Montrer que MNP est équilatéral.

19. Théorème de Tchebychev. ✎ *

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré $n \in \mathbb{N}^*$. On note $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0$ et p sa fonction polynomiale associée. On nomme polynôme cosinusoidal d'ordre n toute combinaison linéaire de fonctions du type $\theta \mapsto \cos(k\theta)$ avec $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et tel que le facteur devant $\theta \mapsto \cos(n\theta)$ (appelé coefficient dominant) est non nul.

- (1) Montrer que $q = p \circ \cos$ est un polynôme cosinusoidal d'ordre n et déterminer son coefficient dominant.
- (2) Soit $\theta \in [0, 2\pi[$. On pose $z = e^{i\theta}$. Montrer que $q(\theta) = z^{-n}h(z)$ où h est une fonction polynomiale associée à un polynôme $H \in \mathbb{C}[X]$ à déterminer. Que peut-on dire de son polynôme réciproque ?

Pour un polynôme $R \in \mathbb{R}[X]$ de degré n , on définit son polynôme réciproque $\tilde{R} = X^n R(1/X)$ (on inverse l'ordre des coefficients).

- (3) On suppose maintenant que q est positif sur $\mathbb{R}$. Montrer que les racines de H de module égal à 1 sont de multiplicité paire. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{U}$, les autres racines β vérifient :

$$|z - \beta| \left| z - \frac{1}{\beta} \right| = \frac{|z - \beta|^2}{|\beta|}$$

- (4) En déduire qu'il existe $C \in \mathbb{R}^*$ tel que :

$$\forall \theta \in [0, 2\pi[, \quad q(\theta) = |C| \prod_{|\alpha|=1} |z - \alpha|^2 \prod_{0 < |\beta| < 1} |z - \beta|^2$$

En conclure le théorème de Riesz : pour q un polynôme cosinusoidal d'ordre n positif, il existe u un polynôme de degré n tel que, pour tout $\theta \in [0, 2\pi[, \quad q(\theta) = |u(e^{i\theta})|^2$.

- (5) Montrer que $|\lambda_n| \leq \lambda_0$, où λ_n et λ_0 sont respectivement les coefficients dominants et constant de q .
- (6) Pour q pas nécessairement positif, montrer que $|\lambda_n| \leq \max_{[0, 2\pi[} |q(\theta)|$ et en déduire le théorème de Tchebychev, affirmant que pour tout polynôme réel P unitaire de degré $n \geq 1$ associé à la fonction polynomiale p , on a

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |p(x)| \geq \frac{1}{2^{n-1}}$$

20. Théorème de Marden. ✎ 💡 * 💎

Pour un triangle $\mathcal{T}$, on définit le polynôme $P_{\mathcal{T}}$ comme le polynôme unitaire de degré 3 dont les racines sont les affixes complexes des sommets de $\mathcal{T}$.

- (1) Considérons f une homothétie du plan complexe exerçant sur ce dernier une rotation d'angle $\theta \in [0, 2\pi[$, un étirement de coefficient $r \in \mathbb{R}_+^*$ et une translation de $\beta \in \mathbb{C}$. Expliciter f .
- (2) Soit un triangle $\mathcal{T}$. Quelles sont les racines de $P'_{f(\mathcal{T})}$?

- (3) Considérons E l'ellipse dont les foyers sont les racines de $P'_{\mathcal{T}}$ et passant par le milieu des cotés de $\mathcal{T}$. Montrer que E est tangente en au moins un de ces milieu.

On admet que l'image de E par toute homothétie est une ellipse.

- (4) On admet ce lemme de géométrie elliptique : soient une ellipse E de foyers F_1 et F_2 et A un point hors de E . On note G_1 et G_2 les points de E tels que (AG_1) et (AG_2) y sont tangentes. Démontrons alors que $\angle F_1AG_1 = \angle F_2AG_2$.

Montrer alors que l'ellipse est tangente en tous les cotés de $\mathcal{T}$.

L'ellipse E tangente en les milieux des cotés d'un triangle $\mathcal{T}$ se nomme l'ellipse de Steiner relative à $\mathcal{T}$. Des résultats de géométrie affine nous permettent d'affirmer qu'elle est unique et nous venons de montrer que ses foyers sont les racines de $P'_{\mathcal{T}}$. C'est le théorème de Marden.



“The early study of Euclid made me a hater of geometry.” - James Joseph Sylvester

4. Calcul matriciel

1. Un produit scalaire. _____ ✓

Soit $n \geq 1$ et $u \in \mathbb{C}^n$, que l'on voit comme une matrice de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$. Que dire si $u^T \bar{u} = 0$?

2. Un produit matriciel. _____ ✓

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et J la matrice ne contenant uniquement des 1. Calculer JMJ .

3. Théorème de Cayley-Hamilton dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. _____ ✓💡

Pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ on pose:

$$\Delta(M) = \text{Tr}(M)^2 - 4 \det(M)$$

- (1) On pose Pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $P_M(X) = X^2 - \text{Tr}(M)X + \det(M)$. Montrer que $P_M(M) = 0$, en convenant que si $Q(X) = c \in \mathbb{R}$ est un polynôme constant, $Q(M) = cI_2$.
- (2) En déduire que M est inversible si et seulement si $\det(M) \neq 0$.
- (3) Montrer que si $\Delta(M) > 0$ il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que:

$$\det(\lambda_1 I_2 - M) = \det(\lambda_2 I_2 - M) = 0$$

Indication: Comment choisir (λ_1, λ_2) en sachant que $\Delta(M) > 0$...

4. $AB - BA = I_n$. _____ ✓ 

Soit $n \geq 1$. Montrer qu'il n'existe pas de couple $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $AB - BA = I_n$.

5. $\mathbb{C}$ comme sous corps de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (1). _____  

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}$, on pose:

$$S(a, b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

- (1) Pour tout $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, calculer $S(a, b)S(c, d)$. Quelle propriété peut on en déduire?
- (2) Que vaut $S(a, b)S(a, b)^T$?
- (3) Quand est-ce que $S(a, b)$ est-il inversible? Donner son inverse quand il l'est.
- (4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in [0, 2\pi[$, calculer $S(\cos(\theta), \sin(\theta))^n$
- (5) En déduire $S(a, b)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6. L'espace $\mathbb{H}$. _____  

On pose:

$$\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{C}^2 \right\}$$

Montrer que $\mathbb{H}$ est stable par somme, produit et par passage à l'inverse lorsque $M \in \mathbb{H} \cap \text{GL}_2(\mathbb{C})$

7. $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. _____ ✓ 

Montrer que toute matrice de taille $n \geq 1$ peut s'écrire comme une unique somme d'une matrice symétrique et antisymétrique.

8. $Z(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$. _____  *

Soit $n \geq 1$. Déterminer:

$$\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), AB = BA\}$$

9. $AB = A + B$. _____  *

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ tel que $AB = A + B$. Montrer que A et B commutent.

10. Somme de matrices inversibles. _____ ✓

Montrer que tout élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit comme la somme de deux matrices inversibles.

11. Une condition d'inversibilité (1). _____ ✓

Soit U, V deux matrices colonnes de même taille à coefficients dans $\mathbb{C}$. Calculer les puissances successives de UV^T et V^TU . En déduire qu'une matrice dont les colonnes ou les lignes sont linéairement liées deux à deux n'est pas inversible.

12. $\mathbb{C}$ comme sous corps de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (2). _____

On va construire $\mathbb{C}$ à partir des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Pour ce faire, on pose $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tel que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:

$$\phi(a + ib) = S(a, b)$$

Avec $S(a, b)$ la matrice définie à l'exercice 5.

- (1) Montrer que ϕ est bijective de $\mathbb{C}$ dans $\{S(a, b), (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$
- (2) Montrer que $\phi(z_1 z_2) = \phi(z_1) \phi(z_2)$ pour tout $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ et que $\phi(z_1 + z_2) = \phi(z_1) + \phi(z_2)$
- (3) Que vaut $\phi(i)$? Comment se traduit la relation $i^2 = -1$ dans l'ensemble des matrices S ?
- (4) En déduire des questions précédentes $S(\cos(\theta), \sin(\theta))^n$ pour $\theta \in [0, 2\pi[$ sans récurrence.

On dit que $\mathbb{C}$ et $\{S(a, b), (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ sont isomorphes et que ϕ établit un

13. Matrices triangulaires telles que $A^T A = A A^T$. _____

Soit A une matrice triangulaire qui commute avec sa transposée. Montrer que A est diagonale.

14. Matrice de Fourier. _____

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\zeta = \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right)$ et $\mathcal{F} = (\zeta^{k\ell})_{0 \leq k, \ell \leq n-1}$. Calculer $\mathcal{F} \mathcal{F}^\dagger$, où $F^\dagger = \overline{F}^T$ est la transconjuguée. En déduire une matrice dont l'inverse est sa transconjuguée.

C'est la matrice de Fourier.

15. Matrices nilpotentes (1). _____ ✓

On dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est *nilpotent* lorsqu'il existe $p \geq 0$ tel que $M^p = O_n$. Montrer que si M est nilpotent, alors $I_n - M$ est inversible et exprimer son inverse.

16. Matrices de permutation. ✓ ↗

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des bijections de $\llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket$ (appelés permutations à n éléments). Pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on pose $P_\sigma = (\delta_{i, \sigma(j)})_{i, j \in \mathbb{N}_n}$ ou δ est le δ de Kronecker.

- (1) Montrer que $G = \{P_\sigma, \sigma \in \mathfrak{S}_n\} \subset \text{GL}_n(\mathbb{Z})$.
- (2) Montrer que $I_n \in G$, que G est stable par multiplication et par passage à l'inverse. On dit que $(G, \times)$ est un groupe.

17. Suites inter-dépendantes. ↗ ?

Soit $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose:

$$\begin{cases} u_{n+1} = -4u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = -7u_n + 5v_n \end{cases}$$

On note $\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}, n \in \mathbb{N} \right\}$ et $D : \Gamma \rightarrow \Gamma$ tel que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, D \left(\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix}$$

- (1) Trouver une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tel que pour tout $\gamma \in \Gamma$ on ait $D(\gamma) = A\gamma$
- (2) Calculer:

$$P^{-1}AP \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$$

- (3) En déduire les expressions explicites de (u_n) et (v_n) .

18. Suites arithmético-géométriques (2). ↗ ?

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $u_{n+1} = au_n + b$. On va déterminer une forme explicite de la suite (u_n) en utilisant le calcul matriciel.

- (1) Traiter le cas $a = 1$.
- (2) On suppose désormais que $a \neq 1$. On pose $(v_n) = (b)_{n \in \mathbb{N}}$ et on adopte les notations de l'exercice précédent. Déterminer la matrice A correspondante.
- (3) Calculer:

$$P^{-1}AP \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 - a \end{pmatrix}$$

- (4) En déduire une expression explicite de (u_n) . À quelle condition(s) est-ce que (u_n) est bornée? Convergente? Vers quelle limite?

19. Image inverse d'une matrice inversible. ✓ ↗

On définit pour tout $x \in \mathbb{R}$ la matrice $M(x) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont égaux à x et les autres à 1 (on peut donc parler de l'application matricielle $M : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$). Calculer $M(a)M(b)$ pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et en déduire $M^{-1}(GL_n(\mathbb{R}))$.



“Logic is the foundation of the certainty of all the knowledge we acquire.”
- Leonhard Euler

5. Fonctions réelles

1. Variations de la fonction W -Lambert. _____ ✎

Soit $W : [-1/e, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant pour tout $x \geq -1/e$ la relation $W(x)e^{W(x)} = x$. Déterminer les variations de la fonction W . *C'est la fonction W -Lambert.*

2. Composées de fonctions monotones. _____ ✓

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $f \circ f$ est croissante et $f \circ f \circ f$ est strictement décroissante. Montrer que f est décroissante.

3. Symétries et graphes. _____ ✎

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que son graphe admet deux centres de symétrie. Montrer que f est la somme d'une fonction périodique et d'une fonction affine.

4. Formules hyperboliques. _____ ✓

On va étudier quelques identités des fonctions hyperboliques. Soit donc $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

- (1) Exprimer $\cosh(x \pm y)$ et $\sinh(x \pm y)$ en fonction de $\cosh(x)$, $\cosh(y)$, $\sinh(x)$, $\sinh(y)$.
- (2) En déduire une formule pour $\tanh(x \pm y)$.

(3) Montrer que pour tout $(x, y) \in]-1, 1[^2$:

$$\frac{x+y}{1+xy} \in]-1, 1[$$

(4) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(\cosh(x) + \sinh(x))^n = \cosh(nx) + \sinh(nx)$$

5. Produit hyperbolique. _____ ✓ ↗

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier $2^n \prod_{k=1}^n \cosh\left(\frac{x}{2^k}\right)$.

6. Un théorème amusant. _____ 💡 * 💎

Soit $A \subset \mathbb{R}$ de cardinal 13. Montrer qu'il existe $(a, b) \in A^2$ vérifiant:

$$0 < \frac{a-b}{1+ab} \leq 2 - \sqrt{3}$$

7. Quelques calculs trigonométriques. _____ ↗

Simplifier les expressions suivantes lorsqu'elles ont un sens:

(1) $\sin(\arccos(x))$	(4) $\tan(\arccos(x))$	(7) $\frac{1 - \tan(x)^2}{1 + \tan(x)^2}$	(8) $\arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$
(2) $\cos(\arcsin(x))$	(5) $\cos(\arctan(x))$		
(3) $\tan(\arcsin(x))$	(6) $\sin(\arctan(x))$		

8. Inégalités fondamentales. _____ ↗ 🎓 *

On va montrer quelques inégalités fondamentales.

(1) Montrer que pour tout $|x| \leq \frac{\pi}{2}$:

$$\frac{2}{\pi}|x| \leq |\sin(x)| \leq |x| \leq |\tan(x)|$$

Et expliquer avec un dessin pourquoi les deux dernières inégalités sont vrai.

(2) En déduire que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$. On pourra raisonner géométriquement et utiliser la question précédente...

(3) Montrer que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $x \leq \frac{2}{3}\sin(x) + \frac{1}{3}\tan(x)$.

(4) Montrer que pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}]$, $\cos(x) \leq \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^3$

9. Une série trigonométrique. _____



Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose:

$$S_n = \sum_{k=0}^n \arctan\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right)$$

La suite (S_n) converge-t-elle? Si oui déterminer sa limite.

10. Aire d'un cercle. _____



On va montrer que l'aire d'un cercle de rayon $R > 0$ est πR^2 .

- (1) Montrer que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x$.
- (2) Montrer que l'aire d'un cercle de rayon R noté $\mathcal{A}$ vérifie:

$$\frac{\mathcal{A}}{2R^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)$$

- (3) Conclure.

11. $f \circ f = \text{Id}_{\mathbb{R}}$. _____



Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ croissante tel que $f \circ f = \text{Id}_{\mathbb{R}}$. Montrer que $f = \text{Id}_{\mathbb{R}}$.

12. Un calcul intégral. _____



Soit $k \in \mathbb{N}$.

- (1) Calculer $\int_0^1 x^k \ln(x) dx$
- (2) En déduire que:

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x-1} dx = \frac{\pi^2}{6}$$

On pourra utiliser le résultat de l'exercice 14 du chapitre 2.

13. Produit trigonométrique. _____



Calculer le produit:

$$\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{2n-1} i \tan\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$$

de deux manières différentes.

14. Calcul de produit. _____

- (1) Montrer que pour tout $x \geq 0$, $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.
 (2) En déduire la valeur de:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$$

15. Calcul de $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$. _____

Déterminer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$.

16. Somme hyperbolique. _____

Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ les sommes suivantes :

$$C_n = \sum_{k=0}^n \cosh(a + bk) \text{ et } S_n = \sum_{k=0}^n \sinh(a + bk)$$

17. Calcul de $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$. _____

- (1) Montrer : $\forall x \in]0, +\infty[, \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}$.
 (2) Montrer qu'il existe $\alpha \in]0, 1[$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, : $\forall x \in]\alpha, +\infty[, \frac{1}{x} - \frac{1}{n} \leq n \ln\left(1 + \frac{1}{nx}\right)$
 (3) En déduire : $\forall x \in [0, 1], \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$

18. Inégalité factorielle. _____

Montrer par une étude de fonction l'inégalité suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

19. Point fixe de Banach-Picard.

Soient $K \in [0, 1[$ et $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ une fonction K -Lipschitzienne, c'est à dire telle que :

$$\forall x, y \in [a, b]^2, |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$$

- (1) Montrer que f admet un unique point fixe $x^\infty \in [a, b]$. *C'est le théorème du point fixe de Banach-Picard*
- (2) En déduire la convergence de toute suite définie par $u_0 \in [a, b]$ et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = f(u_n)$ et déterminer la limite.
- (3) Montrer que les deux premiers résultats subsistent si on suppose seulement que f vérifie:

$$\forall (x, y) \in [a, b]^2, |f(x) - f(y)| < |x - y|$$



“Cauchy is mad, and there is no way of being on good terms with him, although at present he is the only man who knows how mathematics should be treated. What he does is excellent, but very confused...” - Niels Henrik Abel

6. Théorie des groupes

1. Un groupe abélien. _____ ✓

Soit G un groupe tel que $\phi : g \mapsto g^2$ est le morphisme trivial. Montrer que G est abélien.

2. LCI $*$ tel que $(\mathcal{P}(E), *)$ soit un groupe. _____ ✎

Soit E un ensemble non vide. Munir $\mathcal{P}(E)$ d'une loi de composition interne δ qui fait que $(\mathcal{P}(E), \delta)$ soit un groupe abélien.

3. Intersection et unions de sous groupes. _____ ✎

Soit G un groupe, H, K deux sous groupes de G .

- (1) Montrer que $H \cap K$ est un sous groupe de G .
- (2) Montrer que $H \cup K$ est un sous groupe de G si et seulement si $H \subset K$ ou $K \subset H$.

4. Groupes ayant un nombre fini de sous groupes. _____ ✎

Soit G un groupe qui n'a qu'un nombre fini de sous groupes. Montrer que G est fini.

5. LCI (*) tel que $] - 1, 1[, *$ $\cong (\mathbb{R}, +)$. _____

Soit G un groupe et E un ensemble non vide. Soit $f : G \rightarrow E$ est une bijection.

- (1) Montrer que la loi $*$ définie sur E de la manière suivante:

$$\forall (x, y) \in E^2, x * y = f(f^{-1}(x)f^{-1}(y))$$

munit E d'une structure de groupe isomorphe à G .

- (2) En déduire une loi $(*)$ qui rend $] - 1, 1[$ isomorphe à $(\mathbb{R}, +)$.

6. Théorème de Lagrange. _____

Soit G un groupe fini et H un sous groupe de G .

- (1) Montrer que la relation $\mathcal{R}$ définie de la manière suivante définit une relation d'équivalence sur G et déterminer les classes d'équivalence:

$$\forall (x, y) \in G^2, x \mathcal{R} y \iff xy^{-1} \in H$$

- (2) En déduire que le cardinal de H divise celui de G . *C'est le théorème de Lagrange, qui est absolument fondamental et qu'il faut impérativement savoir utiliser.*

7. Isomorphismes. _____

- (1) Montrer que $(\mathbb{R}, +)$ n'est pas isomorphe à $(\mathbb{R}^*, \times)$
 (2) Montrer que $(\mathbb{C}^*, \times)$ est isomorphe à $\mathbb{U} \times \mathbb{R}^*$ pour une loi à déterminer.
 (3) Soit F un groupe fini. Déterminer tous les morphismes de $(\mathbb{Q}, +)$ dans F .

8. Caractérisation des sous groupes de $(\mathbb{R}, +)$. _____ *

On dit que $X \subseteq \mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ lorsque pour tout intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, $I \cap X \neq \emptyset$.

- (1) Montrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
 (2) Soit G un sous groupe de $(\mathbb{R}, +)$. En considérant $\alpha = \inf(G \cap \mathbb{R}_+^*)$, montrer que G est ou bien dense dans $\mathbb{R}$, ou bien de la forme $\alpha\mathbb{Z}$.
 (3) Montrer que $\{\cos(n), n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1, 1]$.
 (4) Montrer que $\{\sin(n), n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1, 1]$.

9. Sous groupe dense de $\mathbb{U}$. ✎

Soit $V = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{U}_n$. Montrer que $(V, \times)$ est un groupe dense dans $\mathbb{U}$.

10. Introduction à $O_n(\mathbb{R})$ et $SO_n(\mathbb{R})$. ✎

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $O_n(\mathbb{R}) := \{M \in GL_n(\mathbb{R}), M^{-1} = M^T\}$.

- (1) Montrer que $(O_n(\mathbb{R}), \times)$ est un sous groupe de $GL_n(\mathbb{R})$. *C'est le groupe des matrices orthogonales.*
- (2) Montrer que l'application déterminant est un morphisme de groupe sur $O_n(\mathbb{R})$ à valeurs dans un groupe à déterminer.
- (3) On définit $SO_n(\mathbb{R})$ comme la plus grande partie de $O_n(\mathbb{R})$ telle que $\det(SO_n(\mathbb{R})) = \{1\}$. Montrer que $SO_n(\mathbb{R})$ est un sous groupe de $O_n(\mathbb{R})$. *C'est le groupe spécial orthogonale, parfois noté $O_n^+(\mathbb{R})$.*
- (4) Déterminer les sous-groupes finis de $SO_2(\mathbb{R})$ et leur donner une interprétation géométrique.

11. Un sous groupe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. ✎

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{G}$ un sous-groupe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ différent de $\{0\}$. On suppose la propriété suivante :

$$\forall M \in \mathcal{G}, \forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), AMB \in \mathcal{G}$$

Montrer que $\mathcal{G} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

12. Sous groupes distingués. ✎

Soit G un groupe. On dit qu'un sous-groupe H de G est distingué (ou normal) si $gHg^{-1} \subset H$ pour tout $g \in G$. On note alors $H \triangleleft G$.

- (1) Dans le cas où G est abélien, déterminer ses sous-groupes distingués.
- (2) Soit H un sous-groupe de G . Montrer que $K = \bigcap_{g \in G} gHg^{-1} \triangleleft G$.

13. Sous groupes bornés de $(\mathbb{C}^*, \times)$. ✓ ✎

Montrer que tout sous-groupe borné de $(\mathbb{C}^*, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{U}, \times)$.

14. La signature. _____

- (1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les morphismes de $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$.
- (2) En déduire la formule de la signature: pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$:

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{i < j} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}$$

15. Stabilisateurs de parties. _____

Soit $(G, *)$ un groupe et $A \subset G$. On définit l'ensemble des stabilisateurs à droite de A comme suit :

$$S_d(A) := \{g \in G, Ag = A\} \text{ où, pour } g \in G, Ag = \{a * g, a \in A\}$$

On définit de manière similaire l'ensemble des stabilisateurs à gauche de A , noté $S_g(A)$.

- (1) Montrer que $S_d(A)$ et $S_g(A)$ sont des sous-groupes de G .
- (2) Que dire de $S_g(S_g(A)), S_d(S_d(A)), S_d(S_g(A))$ et $S_g(S_d(A))$?
- (3) Montrer les équivalences suivante :

$$A < G \iff S_g(A) = A \text{ ou } S_d(A) = A \iff S_g(A) = S_d(A) = A$$

16. Sous groupes triviaux. _____

Que dire d'un groupe G dont les seuls sous-groupes sont G et $\{e\}$?

17. Ordre de $(\mathfrak{S}_n, \circ)$. _____

Montrer que $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ est un groupe engendré par les transpositions du type $(k \ k+1)$ avec $k \in \mathbb{N}_{n-1}$.

18. Centre d'un groupe. _____

Soit G un groupe. On rappelle que $Z(G) = \{g \in G \mid \forall x \in G, gx = xg\}$ se nomme le centre de G .

- (1) Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe distingué abélien de G .
- (2) Montrer que tout sous-groupe de $Z(G)$ est un sous-groupe distingué abélien de G .
- (3) Montrer que $Z(G)$ est stable par tout morphisme surjectif de G sur G .

19. Isomorphisme entre $(\mathbb{Q}, +)$ et $(\mathbb{Q}^*, \times)$. _____

Les groupes $(\mathbb{Q}, +)$ et $(\mathbb{Q}^*, \times)$ sont-ils isomorphes ?

20. Sous groupe de $\mathcal{S}_n$. _____ ✓

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $r \in \mathbb{N}_n$. On définit l'ensemble suivant :

$$F = \{\sigma \in \mathcal{S}_n \mid \mathbb{N}_r \text{ est stable par } \sigma\}$$

Montrer que F est un sous-groupe de $\mathcal{S}_n$ et vérifier le théorème de Lagrange dans ce cas précis.

21. Noyau d'un morphisme. _____

Soit G un groupe cyclique engendré par a d'ordre n . On pose $r \in \mathbb{N}$ et l'application définie par :

$$f : \begin{cases} G \rightarrow G \\ x \mapsto x^r \end{cases}$$

- (1) Montrer que f est un morphisme de G dans lui même.
- (2) Déterminer $\ker(f) := \{x \in G, f(x) = e_G\}$.
- (3) Déterminer l'image de f .
- (4) Soit $y \in G$. Combien de solutions y a-t-il à l'équation $f(x) = y$?

22. Orthogonalité des caractères. _____

Soit G un groupe fini, $f \in \text{hom}(G, \mathbb{C}^*)$. Calculer $\sum_{g \in G} f(g)$

23. Théorème de décomposition de groupes abéliens. _____ *

Soit G un groupe abélien fini de cardinal $n \geq 2$. Un morphisme $\chi : G \rightarrow \mathbb{C}^*$ est appelé un caractère.

- (1) Déterminer les caractères dans le cas où G est cyclique.
- (2) Soit H un sous groupe de G qu'on ne suppose plus cyclique. Montrer que tout caractère de H se prolonge en un caractère de G .
- (3) Montrer l'existence de $(d_1, \dots, d_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$ vérifiant $d_1 | d_2 | \dots | d_n$ et:

$$G \cong \prod_{i=1}^n (\mathbb{Z} / d_i \mathbb{Z})$$

Merci Mr. Tosel !

24. Théorème des 5/8. _____ *

Soit G un groupe non abélien fini. Montrer que la probabilité que deux éléments de G commutent est majoré par $5/8$. Est-ce que cette borne est optimale?

25. Premier théorème d'isomorphisme. _____

Soient G, F deux groupes et $\varphi : G \rightarrow F$ un morphisme de groupes.

- (1) Montrer que $\ker \varphi \triangleleft G$. En déduire que l'on peut munir $G/\ker \varphi$ d'une loi de composition interne qui lui confère une structure de groupes tel que la projection canonique $\pi : G \rightarrow G/\ker \varphi$ soit un morphisme de groupes:

$$\pi : g \mapsto g \ker \varphi$$

- (2) Montrer que $G/\ker \varphi \cong \operatorname{Im} \varphi$. C'est le premier théorème d'isomorphisme, et se résume avec le graphique suivant:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\phi} & \operatorname{Im}(\varphi) \\ \pi \downarrow & \nearrow \exists! \varphi \cong & \\ G/\ker(\varphi) & & \end{array}$$



“Men die, but their deeds abide.” - Augustin Louis Cauchy

7. Suites

1. Quelques suites. _____ ✓

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ continue. Étudier les suites suivantes:

- | | | |
|--|---|---|
| (1) $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ | (3) $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ | (5) $\left(\int_0^1 f(x) x^n dx \right)_{n \in \mathbb{N}}$ |
| (2) $\left(\frac{\ln(n)}{n^\alpha} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ | (4) $((n+1)^\alpha - n^\alpha)_{n \in \mathbb{N}}$ | (6) $\left(\frac{1}{4^n} \binom{2n}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ |

2. Formule de Dirichlet. _____ ✓

Soit $x \in \mathbb{R}$. Que vaut $\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \cos(\pi n! x)^{2m}$?

3. Conditions arithmétiques. _____ ✓

Soient a, b, c et q quatre réels vérifiant :

- a, b et c sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q .
- $a, 2b$ et $3c$ sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison q .

Déterminer les valeurs possibles du quadruplet (a, b, c, q) .

4. Interpolation finie. _____ ✓ ↗

Déterminer une forme explicite d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant :

$$u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 3, u_4 = 4, u_5 = \pi$$

On demande de plus que la fonction f déterminée telle que $u_n = f(n)$ soit continue et usuelle (on ne triche pas avec des indicatrices ou des paramétrisation par segments).

5. Boucles dans $\mathbb{C}$. _____ ✓

Soit $z \in \mathbb{C}$. Étudier la suite $(e^{nz})_{n \in \mathbb{N}}$.

6. Deux suites entrelacées. _____ ↗

Soient $a \leq b$ deux réels positifs. On considère les deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par récurrence comme suit :

$$u_0 = a, v_0 = b, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

Étudier ces deux suites.

7. Une suite dense dans $\mathbb{U}$. _____ ↗ 💡 ↗

Montrer que la suite $\left(\left(\frac{3+4i}{5} \right)^n \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est dense dans $\mathbb{U}$.

8. Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. _____ ✓ ↗

(1) Montrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

(2) Soit $\left(\frac{p_n}{q_n} \right)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n} = \ell \notin \mathbb{Q}$. Montrer que les suites $(|p_n|)$ et $(|q_n|)$ divergent.

9. Suite convexe.

On considère une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 2u_{n+1} \leq u_{n+2} + u_n$$

- (1) En interprétant la suite $(u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ comme la “dérivée” de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, comment pourrait-on qualifier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
- (2) Supposons $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bornée. Montrer que sa dérivée converge et en déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

10. La suite (F_n) (2).

On définit la suite de Fibonacci comme suit :

$$F_0 = F_1 = 1, \forall n \in \mathbb{N}, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

- (1) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, F_n F_{n+2} - F_{n+1}^2 = (-1)^n$. Simplifier alors la somme suivante :

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{F_k F_{k+1}}$$

- (2) Montrer que $F_n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} \binom{n-p}{p}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- (3) Déterminer une forme explicite (sans somme) de F_n ainsi que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}$.
- (4) Que peut-on en déduire d'après la question 2 de l'exercice 17 de ce chapitre ?

11. Limites infimum et supremum.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite bornée. On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\alpha_n = \inf_{k \geq n} \{u_k\} \text{ et } \beta_n = \sup_{k \geq n} \{u_k\}$$

- (1) Montrer que (α_n) est croissante et que (β_n) est décroissante. En déduire qu'ils convergent.
- (2) En raisonnant par l'absurde, montrer qu'il existe une sous suite de (u_n) qui converge.
- (3) On note $\alpha = \liminf u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$ et $\beta = \limsup u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n$. Déterminer α, β lorsque :
 - (u_n) converge
 - $(u_n) = ((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$
- (4) Montrer que (u_n) converge si et seulement si $\alpha = \beta$.

12. Suites moyennables. *

On dit que $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est moyennable si la suite $\left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, et on appelle sa limite la moyenne de u , notée $\mathbb{E}(u)$. On note Ω l'ensemble des suites moyennables de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

- (1) Montrer que toute suite convergente est moyennable. Quelle est la moyenne d'une suite convergente?
- (2) Montrer que $(\Omega, +)$ est un groupe, et que $\mathbb{E} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ définit ainsi un morphisme de groupes.
- (3) On note $\Omega_{\mathbb{Z}} = \Omega \cap \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$. Montrer que $(\Omega_{\mathbb{Z}}, +) < (\Omega, +)$ et déterminer son image par $\mathbb{E}$.

On s'intéresse désormais aux parties de $A \subset \mathbb{N}$ dont la fonction indicatrice est moyennable. On dit qu'une telle partie admet une densité dans $\mathbb{N}$, et que sa densité est $\delta(A) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_A)$.

- (4) Montrer que l'ensemble:

$$A = \bigcup_{k=0}^{\infty} [2^{2k}, 2^{2k+1}[$$

n'admet pas de densité dans $\mathbb{N}$.

- (5) Soit $A \subset \mathbb{N}$. Montrer l'implication:

$$\left(\sum_{a \in A \cap [1, n]} \frac{1}{a} \right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge} \implies A \text{ admet une densité et } \delta(A) = 0$$

Est-ce que la réciproque est vraie?

13. Lemme de Fekete. *

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite sous-additive, c'est-à-dire qui vérifie pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, $u_{m+n} \leq u_m + u_n$. Quelle est la nature de la suite $(u_n/n)_{n \in \mathbb{N}^*}$?

14. Valeurs d'adhérence.

Pour une suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on appelle valeur d'adhérence de u tout élément $\alpha \in \mathbb{R}$ pour lequel il existe une sous-suite de (u_n) qui converge vers α .

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_{n+1} - u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est ou bien vide ou bien un intervalle.

15. Complétude. *

On appelle espace métrique tout ensemble E muni d'une application permettant d'évaluer la distance entre deux éléments. Une telle application d , logiquement appelée distance, vérifie :

- $\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) = 0 \iff x = y$ (séparation)
- $\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie)
- $\forall (x, y, z) \in E^3, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire)

On dit d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'un espace métrique (E, d) (c'est à dire muni de la distance d) qu'elle est de Cauchy lorsqu'elle vérifie :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p \geq N, q \geq N, d(u_p, u_q) < \varepsilon$$

C'est à dire que les termes de la suite se rapprochent les uns des autres. Dans les ensembles classiques, comme $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on pose souvent $|\cdot| : (x, y) \mapsto |x - y|$ (à interpréter comme un module).

- (1) Montrer qu'une suite de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ converge si et seulement si c'est une suite de Cauchy. *On dit alors que $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est complet.*
- (2) Montrer que $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ est complet.
- (3) La propriété de complétude nécessite que la suite de Cauchy converge et que sa limite appartienne à l'ensemble considéré. Donner un exemple d'ensemble réel non-complet.

Il est important de comprendre que la notion de complétude dépend de la distance utilisée, c'est pourquoi elle est toujours précisée.

16. Une suite qui converge vers π .

Étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par récurrence comme suit :

$$\begin{cases} u_1 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = u_n + \frac{\text{sgn}(\sin(u_n))}{2^n} \end{cases}$$

Ici, sgn désigne la fonction signe, valant -1 sur $\mathbb{R}_-^*$, 1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et 0 en 0 .

17. Critère de d'Alembert (1).

Soit (u_n) une suite réelle. On suppose l'existence de $\ell \geq 0$ et $\ell \neq 1$ tel que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \ell$$

- (1) Déterminer la nature de (u_n) en fonction de la valeur de ℓ .

- (2) Montrer que ${}^n\sqrt{|u_n|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell$

- (3) En déduire $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{n} \right)^{\frac{1}{n}}$

18. Quelques ensembles dénombrables. *

- (1) Soit $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'ensembles tous infinis dénombrables (c'est à dire en bijection avec $\mathbb{N}$). Montrer que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ est infini dénombrable.
- (2) Montrer que l'ensemble des suites d'entiers nulles à partir d'un certain rang est infini dénombrable.

19. Une suite qui vérifie $p|u_p$ pour p premier. _____

On pose $u_0 = 4$, $u_1 = u_2 = 0$ et $u_3 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+4} = u_n + u_{n+1}$. Montrer que pour tout p premier, $p|u_p$.

20. Espace complet général. _____

On reprend les définitions de l'exercice 15 de ce chapitre. On considère donc (E, d) un espace métrique et une partie A dense dans E . On suppose que toute suite de Cauchy de A converge dans E (c'est une sorte de complétude relative à E).

Montrer alors que (E, d) est complet.

21. Valeurs entières de (H_n) . _____

On pose pour tout $n \geq 1$ $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Montrer que H_n est entier si et seulement si $n = 1$.

22. Un lemme de densité omniprésent. _____

Soit $(u_n), (v_n)$ deux suites réels croissantes, tendant vers l'infini tel que $u_{n+1} - u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

- (1) Montrer que l'ensemble $\{u_n - v_m, (n, m) \in \mathbb{N}^2\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
- (2) *Quelques oraux X/ENS trivialisés par ce lemme:* Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ croissant, tendant vers l'infini tel que $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$. Montrer que l'ensemble $\{\cos(f(n)), n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1, 1]$.
- (3) Soit $1 > \delta > 0$. on pose $\Omega_\delta = \{n^\delta, n \in \mathbb{N}\}$ avec $\{x\}$ la partie décimale de x . Montrer que Ω_δ est dense dans $[0, 1]$.



“It is not knowledge, but the act of learning, not the possession of but the act of getting there, which grants the greatest enjoyment.” - Carl Friedrich Gauss

8. Arithmétique

1. Quelques résultats arithmétiques. _____ ✓ ↗

- (1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n^2 | (n+1)^n - 1$
- (2) Montrer que $n^4 - n^2$ est toujours un multiple de 12.
- (3) Montrer que tout entier supérieur ou égal à 7 peut s'écrire comme la somme de deux entiers strictement plus grands que 1 et premiers entre eux.
- (4) Soit $p \geq 5$ premier. Montrer que $p^2 - 1$ est toujours un multiple de 24.

2. Formule de Legendre. _____ ↗ 🎓

On fixe p un nombre premier, et on note v_p la valuation p -adique. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- (1) Montrer que le nombre d'éléments $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ dont la valuation p -adique est au moins $k \in \mathbb{N}$ est $\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$

- (2) En déduire la formule de Legendre:

$$v_p(n!) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$$

- (3) Combien de zéros y'a-t-il à la fin de l'écriture de $100!$?

3. Petit théorème de Fermat.

Soit p un nombre premier.

- (1) Montrer que pour tout $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$, $k \binom{p}{k} = p \binom{p-1}{k-1}$
- (2) En déduire que pour tout $(a, b) \in \mathbb{Z}$, $(a+b)^p \equiv a^p + b^p [p]$
- (3) Montrer alors que pour tout $a \in \mathbb{Z}$, $a^p \equiv a [p]$

4. Existence d'entiers tels que $2^n \equiv n [p]$.

Soit p un nombre premier. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $2^n \equiv n [p]$.

5. Théorème d'Erdős-Kalmar.

On souhaite montrer le résultat suivant, due a Erdos et Kalmar en 1939:

Le produit des nombres premiers plus petit qu'un $n \geq 1$ est toujours plus petit que 4^n

On note alors ce produit $\prod_{p \leq n} p$, avec l'indexation par p ne concernant que les nombres premiers.

- (1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\binom{2n+1}{n} \leq 4^n$
- (2) Montrer également que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\prod_{m+1 < p \leq 2m+1} p \mid \binom{2m+1}{m}$
- (3) En déduire le résultat.

6. Identité d'Euler (2).

On note $\varphi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$ l'indicatrice d'Euler. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- (1) Montrer que l'ensemble des inversibles modulo n , noté $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$, est un groupe abélien pour la multiplication. On note ce dernier Ω_n pour simplifier l'écriture.
- (2) Soit $a \in \Omega_n$. Montrer que $\psi : \Omega_n \rightarrow \Omega_n$ est une bijection bien définie:

$$\psi : k \mapsto ak$$

- (3) En déduire le théorème d'Euler: pour tout $a \in \Omega_n$, $a^{\varphi(n)} \equiv 1 [n]$. En déduire une nouvelle démonstration du petit théorème de Fermat.

7. Identité de Gauss (2).

On note $\varphi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$ l'indicatrice d'Euler. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(1) Montrer que:

$$\mathbb{U}_n = \coprod_{d|n} \mathbb{V}_d$$

Avec $\coprod$ qui signifie union disjointe et pour tout $d|n$, $\mathbb{V}_d = \{\omega \in \mathbb{U}_n, \langle \omega \rangle = \mathbb{U}_d\}$.

(2) En déduire la formule de Gauss:

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n$$

8. Théorème de Wilson.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que p est premier si et seulement si $(p-1)! \equiv -1[p]$.

9. Identité d'Euler.

On note $\varphi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$ l'indicatrice d'Euler. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On va montrer de deux manières différentes l'identité:

$$\varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

Avec $\prod_{p|n}$ le produit sur les nombres premiers divisant n .

Méthode 1:

- (1) Montrer que pour $(k, \ell) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $k \wedge \ell = 1 \implies \varphi(k\ell) = \varphi(k)\varphi(\ell)$
- (2) Pour p un nombre premier et $k \geq 1$, calculer $\varphi(p^k)$.
- (3) Conclure.

Méthode 2:

Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$. Pour tout $m \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note A_m l'événement " $m|X$ ".

- (4) Montrer que si $(k, \ell) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ sont deux diviseurs de n et $k \wedge \ell = 1$ alors les événements A_k et A_ℓ sont indépendants. Montrer que si l'on considère encore plus d'éléments deux à deux premiers entre eux qui divisent n alors les événements sont mutuellement indépendants.
- (5) Montrer que $\frac{\varphi(n)}{n} = \mathbb{P}(X \wedge n = 1)$.
- (6) Conclure.

10. Résidus quadratiques mod p . *

Soit p un nombre premier. On note $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et $\mathbb{F}_p^*$ les inversibles de $\mathbb{F}_p$, à savoir $\mathbb{F}_p \setminus \{0\}$. On note $\mathcal{Q}_p = \{k \in \mathbb{F}_p^*, \exists \ell \in \mathbb{F}_p^*, \ell^2 = k\}$ l'ensemble des carrés de $\mathbb{F}_p^*$.

- (1) Montrer que $(\mathcal{Q}_p, \times)$ est un groupe.
- (2) Montrer que $(\{-1, 1\}, \times) \triangleleft (\mathbb{F}_p^*, \times)$ et que:

$$\mathbb{F}_p^* / \{-1, 1\} \cong \mathcal{Q}_p$$

- (3) En déduire qu'il y a exactement $\frac{p-1}{2}$ carrés dans $\mathbb{F}_p^*$.
- (4) Montrer que x est un carré dans $\mathbb{F}_p^*$ si et seulement si $x^{\frac{p-1}{2}} = 1$.

11. Puissances entières.

Soit $(a, b, c, n) \in (\mathbb{N}^*)^4$ tel que $a \wedge b = 1$ et $ab = c^n$. Montrer : $\exists (\alpha, \beta) \in (\mathbb{N}^*)^2, a = \alpha^n$ et $b = \beta^n$.

12. PGCD de valeurs polynomiales.

Soient $P \in \mathbb{Z}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}^*$ et $d = \bigwedge_{k=0}^n P(k)$. Montrer : $\forall p \in \mathbb{Z}, d|P(p)$.

13. Petit théorème de Fermat version matricielle. *

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- (1) Montrer que pour tout p premier, $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})^2$, $\text{Tr}((A+B)^p) \equiv \text{Tr}(A^p) + \text{Tr}(B^p)[p]$
- (2) En déduire que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ et p premier, $\text{Tr}(A^p) \equiv \text{Tr}(A)[p]$

14. Théorème de Bertrand. *

On souhaite montrer le postulat de Bertrand, aussi appelé théorème de Tchebychev:

Pour tout $n > 1$ il existe un nombre premier p tel que $n < p < 2n$

- (1) Montrer que le postulat de Bertrand est vrai pour $2 \leq n \leq 630$. On pourra considérer la liste de nombres 2,3,5,7,13,23,43,83,163,317 et 631.

On suppose désormais que $n > 630$.

(2) On pose:

$$\theta(x) \triangleq \sum_{p \leq x} \ln(p)$$

Avec la somme étant prise sur les nombres premiers inférieurs à x . En admettant le résultat de l'exercice 5 de ce chapitre, montrer que pour tout $x > 0$, $\theta(x) \leq 2x \ln(2)$

(3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{4^n}{2n} \leq \binom{2n}{n}$

(4) Pour tout p premier, on pose $R(p, n)$ la valuation p -adique de $\binom{2n}{n}$. On pose:

$$P_1 = \prod_{p \leq \sqrt{2n}} p^{R(p, n)}, \quad P_2 = \prod_{\sqrt{2n} < p \leq \frac{2n}{3}} p^{R(p, n)}, \quad P_3 = \prod_{\frac{2n}{3} < p \leq n} p^{R(p, n)}, \quad P_4 = \prod_{n < p < 2n} p^{R(p, n)}$$

Montrer que si $P_4 > 1$ alors le postulat de Bertrand est vrai.

(5) En utilisant la formule de Legendre, montrer que:

$$P_1 \leq (2n)^{\sqrt{2n}}$$

(6) De manière analogue, montrer que:

$$P_2 \leq 4^{\frac{2n}{3}} \text{ et } P_3 = 1$$

(7) En déduire que $P_4 > \frac{4^{\frac{n}{3}}}{(2n)^{1+\sqrt{2n}}}$

(8) Conclure. On rappelle que $n > 630$ et on pourra poser $2n = 2^{2t}$ et remarquer que $t > 5$.

15. Théorème de Kürschák. _____



Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \llbracket m+1, +\infty \llbracket$. On note $H_{m,n} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \dots + \frac{1}{n} = \sum_{k=m}^n \frac{1}{k}$.

(1) On note $\alpha = \max\{v_2(j), j \in \llbracket m, n \rrbracket\}$. Montrer qu'il existe un unique $k \in \llbracket m, n \rrbracket$ tel que $v_2(k) = \alpha$.

(2) En déduire que $H_{m,n}$ n'est jamais entier.

16. IMO 1988 problème 6. _____



Soit a, b des entiers naturel vérifiant $ab + 1 \mid a^2 + b^2$. Montrer que $\frac{a^2 + b^2}{1 + ab}$ est un carré.

17. Un exercice de Putnam. _____



Soit p un nombre premier. On souhaite montrer qu'il y a au moins $\frac{p+1}{2}$ éléments $n \in \mathbb{F}_p$ tel que

$$p \nmid \sum_{k=0}^{p-1} k! n^k.$$

- (1) Montrer que le problème est équivalent à montrer qu'il y a au plus $\frac{p-1}{2}$ éléments $n \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$ tel que $\sum_{k=0}^{p-1} k!n^k \equiv 0[p]$
- (2) Montrer que le problème est équivalent à montrer qu'il existe au plus $\frac{p-1}{2}$ éléments $n \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$ tel que $\sum_{k=0}^{p-1} \frac{n^k}{k!} \equiv 0[p]$. On pourra librement mobiliser les théorèmes de Wilson (Exercice 8) et le petit théorème de Fermat.
- (3) On pose $P(X) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{X^k}{k!}$ et $Q(X) = P(X) - X + X^p$. Montrer que P admet au plus $p-1$ racines dans $\mathbb{F}_p^*$. Montrer que ses racines sont toutes doubles à l'aide de Q .
- (4) Conclure.

18. Sous groupes de $\mathbb{U}_n$. ✓ ↗

Soit m, n deux entiers naturels plus grandes que 1.

- (1) Trouver un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbb{U}_m \cap \mathbb{U}_n = \mathbb{U}_k$
- (2) Que dire de $\langle \mathbb{U}_m \cup \mathbb{U}_n \rangle$?

19. Théorème des restes Chinois. ↗ 🎓

Soit $m_1, \dots, m_p$ des entiers supérieurs à 2 et deux à deux premiers entre eux et $a_1, \dots, a_p$ des entiers quelconques.

- (1) Montrer que:

$$\bigoplus_{i=1}^p \mathbb{Z}/m_i\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/m_1 \times \dots \times m_p\mathbb{Z}$$

On pourra procéder par récurrence.

- (2) En déduire qu'il existe un unique solution modulo $M = m_1 \times \dots \times m_p$ au système suivant:

$$\begin{cases} x \equiv a_1[m_1] \\ x \equiv a_2[m_2] \\ \vdots \\ x \equiv a_p[m_p] \end{cases}$$

Et expliciter une telle solution.

20. Nombres premiers de la forme $4n+3$ et $4n+1$. ↗ ? * 🎓

- (1) Montrer qu'il y a une infinité de nombres premiers de la forme $4n+3$
- (2) Montrer qu'il y a une infinité de nombres premiers de la forme $4n+1$



“My [algebraic] methods are really methods of working and thinking; this is why they have crept in everywhere anonymously.” - Emmy Noether

9. Anneaux et corps

1. Principalité de $\mathbb{K}[X]$. _____ ✓

Soit $\mathbb{K}$ un corps quelconque.

- (1) Montrer que l'anneau $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ est un anneau principal.
- (2) A quelle condition est-ce qu'un idéal de $\mathbb{K}[X]$ est il maximal?

2. Entiers de Gauss. _____ ✎ 🎓

On note $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib, (a, b) \in \mathbb{Z}\}$ appelé les entiers de Gauss et on note $\varphi(z) = |z|^2$ pour tout $z \in \mathbb{Z}[i]$.

- (1) Montrer que $(\mathbb{Z}[i], +, \times)$ est un anneau.
- (2) Qui sont les inversibles parmi les entiers de gauss?
- (3) Montrer que pour tout $(s, \omega) \in \mathbb{Z}[i]^2$ avec $\omega \neq 0$, il existe $(q, r) \in \mathbb{Z}[i]^2$ tel que $s = \omega q + r$ avec $\varphi(r) < \varphi(\omega)$
- (4) En déduire que l'anneau des entiers de Gauss est principal.

3. Un anneau principal. _____ ✎ 💡

Soit p un nombre premier. Montrer que $\Omega = \left\{ \frac{a}{p^n}, (a, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \right\}$ est un anneau principal.

4. Idéaux maximaux.



- (1) Montrer que tout idéal I d'un anneau non nul A est le noyau d'un morphisme d'anneau.
- (2) Soit A un anneau non nul. Montrer l'équivalence:

$$I \text{ est un idéal maximal de } A \iff A/I \text{ est un corps.}$$

5. Initiation aux modules.



Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'anneaux. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n : A_n \rightarrow A_{n+1}$ un morphisme d'anneaux. On dit que la suite:

$$A_n \xrightarrow{f_n} A_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} A_{n+2}$$

est *exacte* lorsque $\text{Im}(f_n) = \ker(f_{n+1})$, et on généralise facilement cette notion pour des suites plus longues.

- (1) On suppose que les deux suites suivantes sont exactes:

$$0 \xrightarrow{\text{Id}} A_0 \xrightarrow{f_0} A_1$$

$$A_0 \xrightarrow{f_0} A_1 \xrightarrow{\pi} 0$$

Où 0 désigne l'anneau nul. Interpréter cela.

- (2) Soit $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une autre suite d'anneaux, et $g_n : B_n \rightarrow B_{n+1}$ un morphisme d'anneaux. On suppose que le diagramme suivant commute, c'est à dire que quelque soit le chemin suivi, le résultat est le même (par exemple, $g_{n+1} \circ g \circ f_n = g_{n+1} \circ g_n \circ f$):

$$\begin{array}{ccccccc} A_n & \xrightarrow{f_n} & A_{n+1} & \xrightarrow{f_{n+1}} & A_{n+2} & \longrightarrow & 0 \\ f \downarrow & & g \downarrow & & & & \\ B_n & \xrightarrow{g_n} & B_{n+1} & \xrightarrow{g_{n+1}} & B_{n+2} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Avec f, g des morphismes d'anneaux et on suppose que les lignes supérieures et inférieures sont exactes. Montrer qu'il existe un unique morphisme d'anneaux $\phi : A_{n+2} \rightarrow B_{n+2}$ qui fait commuter le diagramme, et montrer que si f, g sont des isomorphismes alors ϕ en est un également.

- (3) On adopte les mêmes hypothèses qu'à la question précédente pour le diagramme:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A_n & \xrightarrow{f_n} & A_{n+1} & \longrightarrow & A_{n+2} \\ & & & & g \downarrow & & f \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & B_n & \xrightarrow{g_n} & B_{n+1} & \longrightarrow & B_{n+2} \end{array}$$

Montrer qu'il existe un unique morphisme d'anneaux $\phi : A_n \rightarrow B_n$ qui fait commuter le diagramme, et que si f, g sont des isomorphismes alors ϕ en est également un.

- (4) Ces résultats restent-ils vrais si l'on considère des groupes plutôt que des anneaux ?
- (5) En déduire une démonstration en diagramme pour le premier théorème d'isomorphisme (exercice 25 dans le chapitre sur les groupes).
- (6) Montrer que si A est un anneau non nul et si I_1, I_2 sont deux idéaux de A isomorphes alors les anneaux quotients A/I_1 et A/I_2 sont également isomorphes.

6. Polynômes annulateurs et morphismes de corps. _____

Soit $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$ deux corps commutatifs intègres. on dit que $\alpha \in \mathbb{L}$ est algébrique sur $\mathbb{K}$ s'il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul tel que $P(\alpha) = 0$.

- (1) Montrer que $I_\alpha = \{P \in \mathbb{K}[X], P(\alpha) = 0\}$ est un idéal principal de $\mathbb{K}[X]$, engendré par un unique polynôme unitaire irréductible Π_α .
- (2) Montrer que $\varphi : P \mapsto P(\alpha)$ est un morphisme d'anneaux de $\mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{L}$, et montrer que son image est un corps.

7. Factorisation dans un anneau principal. _____

Soit A un anneau principal. On admet que le lemme de Krull: *Dans un anneau non nul, tout idéal stricte est inclus dans un idéal maximal.*

- (1) Soit (I_n) une suite d'idéaux croissante de A , c'est à dire que $I_n \subseteq I_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite (I_n) est stationnaire.
- (2) En déduire que tout élément $a \in A$ peut se mettre sous la forme $a = u \times p_1 \times \dots \times p_k$ avec $p_1, \dots, p_k$ des irréductibles de A et u inversible.

8. Éléments algébriques de $\mathbb{R}$. _____

On dit que $\alpha \in \mathbb{R}$ est algébrique s'il existe un $P \in \mathbb{Q}[X]$ non nul tel que $P(\alpha) = 0$. Soit donc $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ algébriques. On propose ici de démontrer le résultat de l'exercice 6 dans le cas ou $\mathbb{Q} = \mathbb{K}$ et $\mathbb{R} = \mathbb{L}$.

- (1) Montrer que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ et $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ sont algébriques.
- (2) Soit $\Pi \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $\Pi(\alpha) = 0$ et Π soit de degré minimal. Justifier l'existence de Π et montrer qu'il est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.
- (3) Montrer que si $P \in \mathbb{Q}[X]$ annule α alors $\Pi | P$
- (4) Montrer que si $P \in \mathbb{Q}[X]$ n'annule pas α alors Π et P sont premiers entre eux.
- (5) En déduire que $\mathbb{Q}[\alpha] = \{P(\alpha), P \in \mathbb{Q}[X]\}$ est un corps.

9. Un sous anneau de $\mathbb{Q}$. _____

Soit p un nombre premier. On pose $\mathbb{Z}_p := \left\{ \frac{a}{b}, (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, p \nmid b \right\}$.

- (1) Montrer que $\mathbb{Z}_p$ est un sous-anneau de $(\mathbb{Q}, +, \times)$.
- (2) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{Q}$, x ou x^{-1} appartient à $\mathbb{Z}_p$.
- (3) Montrer que $\mathbb{Z}_p$ est un sous-anneau maximal de $(\mathbb{Q}, +, \times)$.

10. L'anneau $\text{End}(G)$. _____ ✓

Soit $(G, +)$ un groupe abélien. Munir l'ensemble $\text{End}(G)$ des endomorphismes sur G d'une structure d'anneau.

11. Condition suffisante pour qu'un anneau soit un corps. _____ ✎ 🎓

Montrer que tout anneau commutatif intègre fini est un corps.

12. Morphismes de corps. _____ ✎

Soient $\mathbb{K}$ et $\mathbb{L}$ deux corps. Montrer que tout morphisme d'anneaux non nul $f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{L}$ est injectif.

13. Sous anneaux de $\mathbb{Z}^2$. _____ ✎ 💡

Pour $d \in \mathbb{N}$, on note $A_d := \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2, x \equiv y [d]\}$. Montrer que ces ensembles sont exactement les sous-anneaux de $\mathbb{Z}^2$.

14. Tableau d'un corps. _____ ✎

Dresser la table d'addition et de multiplication sur un corps à 4 éléments.

15. A -modules (1). _____ ✎ 💎

Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau. On dit que $(M, +, \times)$ est un A -module à gauche lorsque $(M, +)$ est un groupe abélien et que la loi externe $\times$ sur $A \times M$ dans M vérifie :

- $\forall x \in M, 1 \times x = x$
- $\forall (a, b) \in A^2, \forall x \in M, (a \cdot b) \times x = a \times (b \times x)$
- $\forall (a, b) \in A^2, \forall x \in M, (a + b) \times x = a \times x + b \times x$
- $\forall a \in A, \forall (x, y) \in M^2, a \times (x + y) = a \times x + a \times y$

On dit que M est un A -module si c'est un A -module à droite et à gauche.

- (1) Par analogie, que deviennent ces lois pour un A -module à droite ? On note A^{op} l'anneau opposé à A , c'est à dire dans lequel $a \cdot_{A^{op}} b = b \cdot a$ pour tout $(a, b) \in A^2$. Que dire alors des A^{op} -modules à gauche ou à droite ? Que dire du cas A commutatif ?
- (2) On peut voir A comme un A -module (on traite les éléments de A comme produit de deux éléments de A). Quels sont ses sous-modules ?
- (3) Montrer que tout groupe abélien est un $\mathbb{Z}$ -module pour une loi multiplicative à définir.

- (4) Soit M groupe abélien. Pouvons-nous qualifier M de $\text{End}(M)$ -module ? (ici $\text{End}(M)$ représente les morphismes de groupes de M dans lui même).
- (5) Montrer que M précédemment défini est un E -module pour un certain sous-anneau E de $\text{End}(M)$.

Remarque : la notion de module est une généralisation de la notion de $\mathbb{K}$ -espace vectoriel avec $\mathbb{K}$ un corps. Ici, on se contente d'un A -module avec A un anneau mais les lois qui régissent ces structures restent fondamentalement les mêmes.

16. A -modules (2). ✎

Soit A un anneau commutatif unitaire. On reprend la définition des modules de l'exercice précédent en rajoutant celle des modules libre : on dit qu'un A -module M est libre lorsqu'il possède une base $B \subset A$, c'est à dire lorsque l'on peut écrire tout élément de M comme une combinaison linéaire dans $A \times B$ finie (c'est à dire une somme de termes du type $a \times b$ où $(a, b) \in A \times B$).

Une base B d'un A -module M est nécessairement une partie de M qui est génératrice de M (comme énoncé précédemment) et libre, c'est à dire telle que pour toute sous-famille $(e_i)_{1 \leq i \leq n} \in B^n$ d'éléments deux à deux distincts, on a :

$$\forall (a_i)_{1 \leq i \leq n} \in A^n, \sum_{i=1}^n a_i e_i = 0 \iff \forall i \in \mathbb{N}_n, a_i = 0$$

- (1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ n'est pas un $\mathbb{Z}$ -module libre.
- (2) On suppose que tout A -module est libre. Montrer que A est alors un corps ou l'anneau nul.
- (3) On traite ici A comme un A -module. Montrer qu'un idéal I de A est un sous-module libre de A si et seulement si I est engendré par un élément de A non diviseur de 0.

17. A -modules (3). ✎

Soit A un anneau unitaire. On reprend les définitions de modules des exercices précédents en rajoutant celle des modules de type fini : on dit qu'un A -module est de type fini lorsqu'il possède une famille génératrice finie.

De plus, on définit les morphismes de A -modules sur M dans N deux A -modules comme des morphisme de groupes $\varphi : M \rightarrow N$ qui vérifient $\varphi(a \times m) = a \times \varphi(m)$ pour tout $(a, m) \in A \times M$.

Enfin, pour M et N deux A -module, on note $M \oplus N$ le A -module composé des couple $(m, n) \in M \times N$.

On considère donc $n \in \mathbb{N}^*$, M un A -module de type fini et $\varphi : M \rightarrow A^n$ un morphisme de A -modules. On suppose φ surjectif.

- (1) Montrer que φ admet un inverse à droite noté ψ .
- (2) Montrer que $M \cong \ker(\varphi) \oplus \text{im}(\psi)$
- (3) Montrer que $\ker(\varphi)$ est de type fini.

18. A -modules (4). ✎ *

Soit A un anneau unitaire. On reprend toutes les définitions sur les modules des trois exercices précédents. On définit ici les anneaux et modules noethériens : on dit qu'un A -module M est noethérien

si tout sous-module de M est de type fini. Un anneau est dit noethérien à gauche (resp. à droite) si tout idéaux de A à gauche (resp. à droite) est de type fini. Enfin, on dit que A est noethérien s'il l'est à gauche et à droite.

On considère donc M un A -module.

- (1) Soit P un sous-module de M . Montrer que M est noethérien si et seulement si P et M/P le sont.
- (2) Montrer que si M est noethérien alors $M[X]$ l'est aussi comme $A[X]$ -module.

Indication : pour N un sous-module de $M[X]$, considérer N_n l'ensemble des coefficient dominant des polynômes de degré n de N .

- (3) On suppose A commutatif. Montrer que $A[X]$ est noethérien si et seulement si A l'est.

19. $1 - ab$ et $1 - ba$. _____



Soit A un anneau, soit $(a, b) \in A^2$ tel que $1 - ab$ est inversible. Montrer que $1 - ba$ est inversible.

20. Racines de l'unité. _____



Soit $\mathbb{K}$ un corps algébriquement clos tel que $\chi(\mathbb{K}) = 0$ (de caractéristique 0). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathbb{U}_n(\mathbb{K})$ les racines n -ièmes de l'unité de $\mathbb{K}$.

- (1) Montrer que $\mathbb{U}_n(\mathbb{K})$ est un sous groupe cyclique de $\mathbb{K}^\times$ quelque soit $n \geq 1$.
- (2) On note $\text{Tor}(\mathbb{K})$ tout les racines de l'unité:

$$\text{Tor}(\mathbb{K}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{U}_n(\mathbb{K})$$

Et pour tout $\ell \in \mathcal{P}$ on note $\text{Tor}_{\ell^\infty}(\mathbb{K}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{U}_{\ell^n}(\mathbb{K})$. Montrer qu'on a les isomorphismes de groupes suivants:

$$\text{Tor}(\mathbb{K}) \cong \bigoplus_{\ell \in \mathcal{P}} \text{Tor}_{\ell^\infty}(\mathbb{K}) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$



“A mathematician who is not also something of a poet will never be a complete mathematician.” - Karl Weierstrass

10. Fonctions continues de la variable réelle

1. Uniforme continuité sur $\mathbb{R}$. _____ ✓

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue tel que $f(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0$. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

2. Théorème de Heine. _____ ✓

Soit $a < b$ deux réels et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. On souhaite montrer le théorème de Heine, qui affirme que f est uniformément continue sur $[a, b]$.

- (1) Écrire la négation de l'uniforme continuité de f sur $[a, b]$.
- (2) En déduire une contradiction. *On pourra exploiter la caractérisation séquentielle de la continuité.*

3. Points de continuité. _____ ✓

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose:

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor & \text{sinon} \end{cases}$$

Étudier la continuité de g sur $\mathbb{R}$.

4. Suite de racines. _____

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \geq 0$, on pose $f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \dots + x - 1$.

- (1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n admet un unique racine dans $\mathbb{R}^+$, que l'on note désormais (a_n) .
- (2) Montrer que (a_n) est une suite strictement décroissante, et en déduire sa convergence.
- (3) Montrer que $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}$

5. Prolongement d'une fonction uniformément continue. _____

Soit $f : [0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ uniformément continue. Montrer que l'on peut prolonger f par continuité en 1.

6. Majoration affine de fonctions uniformément continues. _____ *

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ uniformément continue. montrer qu'il existe deux réels positifs α, β tels que pour tout $x \geq 0$, $|f(x)| \leq \alpha x + \beta$.

7. Existence de point fixe. _____

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue tel que:

$$\frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \ell < 1$$

Montrer que f admet un point fixe $\alpha \geq 0$.

8. Continuité sur les espaces denses. _____

Soit $X \subset \mathbb{R}$ une partie dense et f, g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ qui coïncident sur X . Montrer que f et g coïncident sur $\mathbb{R}$.

9. Un exercice de Bartho. _____

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0 et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue en 0 telle que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) - f(x)}{x} = 0$$

Montrer que f est dérivable en 0.

Merci Bartho!

10. Lemme de Riemann-Lebesgue. _____ *

Soit $a < b$ deux réels et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. On souhaite montrer le lemme de Riemann-Lebesgue:

$$\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) e^{i\Lambda t} dt = 0$$

(1) Montrer que le résultat est vraie pour f de classe $\mathcal{C}^1$.

On souhaite alors montrer le cas général. On appelle *fonction en escalier* toute fonction qui est combinaison linéaire finie de fonction indicatrices d'intervalles. Pour toute fonction bornée g sur $[a, b]$, on note $\|g\|_\infty = \sup_{a \leq x \leq b} |g(x)|$

(2) Montrer qu'il existe une suite (f_n) de fonctions en escalier qui s'annulent toutes sur $\mathbb{R} \setminus [a, b]$ tel que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_\infty = 0$$

(3) En déduire le lemme de Riemann-Lebesgue.

11. Ensembles denses et dénombrables. _____ *

Soit (u_n) une suite tel que $U = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un homéomorphisme tel que $U = \varphi(\mathbb{Q})$.

12. Points de continuité de fonctions monotones. _____ *

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monotone. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de f est au plus dénombrable.

13. Approximation d'une somme (1). _____

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue en 0. Discuter, suivant la nature de f au voisinage de 0, la nature de:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right)$$

14. CNS sur la densité de l'image d'une fonction périodique. _____ *

Soit $\alpha > 0$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ α -périodique. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur α pour que $f(\mathbb{Z})$ soit dense dans $f(\mathbb{R})$.

15. Théorème de Niven-Parks.



- Dans tout le sujet, $c > 0$ est un réel.
- On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels.
- On note $\mathcal{P}_c = \{Q \in \mathbb{R}[X], \forall k \in \mathbb{N}, Q^{(k)}(0) \in \mathbb{Z} \text{ et } Q^{(k)}(c) \in \mathbb{Z}\}$ (ici, l'exposant en k signifie la k -ième dérivée).
- On dit qu'une suite de fonctions $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies sur $[0, c]$ est de *Niven* si pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\varphi'_{k+1} = \varphi_k$ et si $\varphi_k(0) \in \mathbb{Z}$ et $\varphi_k(c) \in \mathbb{Z}$.
- On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, c]$ si elle est dérivable une infinité de fois sur $[0, c]$ avec $f^{(n)}$ continue sur $[0, c]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- f est dite *Nivénienne* s'il existe une suite de Niven $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tel que $\varphi_0 = f$ et si elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, c]$.
- On dit que $p, q \in \mathbb{R}_+^*$ sont conjugués si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

(1) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $a^n = o(n!)$.

(2) Soit f, g deux applications continues sur $[0, c]$. Montrer que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^c f(t) \frac{g(t)^n}{n!} dt = 0$$

(3) Montrer que $(\mathcal{P}_c, +, \times)$ est un anneau stable pour la dérivation.

(4) Soit $P \in \mathcal{P}_c$ tel que $P(0) = P(c) = 0$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{P^n}{n!} \in \mathcal{P}_c$.

(5) On suppose dans cette question que $c \in \mathbb{Q}$. Montrer qu'il existe $Q \in \mathcal{P}_c$ de degré 2 tel que $Q(c) = Q(0) = 0$ et pour tout $x \in]0, c[, Q(x) > 0$.

(6) On suppose que c n'est pas rationnel. Déterminer $\mathcal{P}_c$.

On va maintenant montrer l'irrationalité de certains éléments de $\mathbb{R}$.

(7) Trouver $c > 0$ tel que la fonction exponentielle soit Nivénienne sur $[0, c]$.

(8) Soit f une application Nivénienne sur $[0, c]$. Montrer que pour tout $Q \in \mathcal{P}_c$:

$$\int_0^c f(t)Q(t) dt \in \mathbb{Z}$$

(9) En déduire le théorème de Niven-Parks: si $c > 0$ est rationnel, alors la seule fonction Nivénienne $f : [0, c] \rightarrow \mathbb{R}$ à valeurs positives est la fonction nulle.

(10) En déduire l'irrationalité de π , e et $\log(|r|)$ pour $r \in \mathbb{Q}^*$, $r \neq 1$.

16. Théorème de Weierstrass.



Soit I un segment de $\mathbb{R}$. On se propose ici de démontrer le théorème de Weierstrass:

Pour toute application continue $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $x \in I$,

$$|f(x) - P(x)| \leq \varepsilon$$

Soit donc f une fonction continue sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$. On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $0 \leq k \leq n$ les polynômes de Bernstein $B_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$ et $B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}(x)$

- (1) Montrer que l'on peut supposer que $I = [0, 1]$ sans perte de généralité.
 (2) Montrer les identités suivantes:

$$\sum_{k=0}^n B_{n,k}(x) = 1 \quad \sum_{k=0}^n k B_{n,k}(x) = nx \quad \sum_{k=0}^n k(k-1) B_{n,k}(x) = n(n-1)x^2$$

- (3) En déduire la valeur de:

$$\sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} - x \right)^2 B_{n,k}(x)$$

- (4) Soit $\varepsilon > 0$, x dans I . f étant continue sur le segment I , elle y est uniformément continue d'après le théorème de Heine, donc il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $y \in I$ tel que $|x - y| \leq \delta$, $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. Montrer que:

$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \sum_{\left| \frac{k}{n} - x \right| \leq \delta} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| B_{n,k}(x) + \sum_{\left| \frac{k}{n} - x \right| > \delta} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| B_{n,k}(x)$$

- (5) En déduire que l'on a:

$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon \sum_{\left| \frac{k}{n} - x \right| \leq \delta} B_{n,k}(x) + 2M \sum_{\left| \frac{k}{n} - x \right| > \delta} B_{n,k}(x)$$

Où $M = \sup_{x \in I} |f(x)|$

- (6) En utilisant soit une approche probabiliste ou analytique, montrer que l'on a:

$$\sum_{\left| \frac{k}{n} - x \right| > \delta} B_{n,k}(x) \leq \frac{x(1-x)}{n\delta^2}$$

- (7) Conclure.

17. Quelques limites intéressantes. ✓

Soient a, b deux réels. Montrer que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (|a|^x + |b|^x)^{\frac{1}{x}} = \max(|a|, |b|) \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} (|a|^x + |b|^x)^{\frac{1}{x}} = \min(|a|, |b|)$$

18. Formule de Leibniz.

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

- (1) Trouver un équivalent de la suite (I_n) , définie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \int_0^1 f(t) t^n dt$$

- (2) Trouver un équivalent de la suite (T_n) , définie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$T_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(\theta)^n d\theta$$

(3) En déduire la formule:

$$\left| \frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} \right| =_O \frac{1}{4n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

19. Carrés continus identiques. ✍

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle réel I à valeurs dans $\mathbb{C}$ telles que f ne s'annule jamais sur l'intérieur de I et que $f^2 = g^2$ sur I .

- (1) Montrer que $g = \pm f$.
- (2) Montrer que cette implication est compromise si l'une des hypothèse suivante n'est plus vérifiée :
 - f ou g sont continues
 - f ne s'annule jamais sur l'intérieur de I
 - I est un intervalle

20. Une fonction horrible. ✓ ✍

(1) Soit la fonction réelle suivante :

$$f : \begin{cases} I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x^{\lfloor x \rfloor}}{\lfloor x \rfloor^x} \end{cases}$$

Déterminer l'ensemble I maximal sur lequel f est continue à droite en tout point. Que dire de la continuité à gauche de f sur I ?

(2) Calculer les limites des suites $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ dans les cas suivant :

$$a. (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = (n)_{n \in \mathbb{N}^*} \quad b. (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = \left(n + \frac{1}{2}\right)_{n \in \mathbb{N}^*} \quad c. (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = \left(n + \frac{1}{\ln(n)}\right)_{n \geq 2}$$

(3) Soit $a \in [0, 1]$. Montrer : $\exists (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ et $f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$.

21. Dériver un maximum. _____

Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ toutes deux dérivables en $x_0 \in \mathbb{R}$. On pose sur $\mathbb{R}$ la fonction $M : x \mapsto \max(f(x), g(x))$. M est-elle dérivable en x_0 ?

22. Approximation d'une somme (2). _____ 🎓

Soit $f \in \mathcal{F}([0, 1], \mathbb{R})$ dérivable en 0 et nulle en 0. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k^2}{n^3}\right)$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ainsi définie converge et déterminer sa limite.

23. Taux d'accroissement aux ordres supérieurs. _____

(1) Soit $f \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R})$ et $x \in \mathbb{R}$. Déterminer :

- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$
- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2}$
- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+3h) - 3f(x+2h) + 3f(x+h) - f(x)}{h^3}$

(2) Généraliser Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R})$ et $x \in \mathbb{R}$.



Erhard Schmidt (born 1876 in Estland) visited Tsarist Russia. The police searched his luggage and confiscated a dangerous book. It mentioned “Power of the masses” (actually: “Mächtigkeit der Menge”) too often. There went a fine book about set theory... When Schmidt told this to his friend Constantin Caratheodory (born 1873, Berlin, Greek but originally a Turkish subject), Caratheodory said: “That’s nothing to what happened to me on entering Turkey. I had an engineering book confiscated by the Turkish police because it talked about a machine that made fifty revolutions a minute.”

11. Fonctions convexes

Dans toute cette partie, on appelle combinaison convexe tout n -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in [0, 1]^n$ vérifiant:

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$$

1. Inégalité de Young. _____ ✓🎓

- (1) On note $\ln : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ le logarithme népérien, l’application réciproque de l’exponentielle $\exp$. Montrer que $\ln$ est concave sur son ensemble de définition.
- (2) En déduire que pour tous p et q conjugués, c’est à dire positifs et tels que $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$, et pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

2. Inégalité de Jensen et applications. _____ ✎🎓🌀

- (1) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ une combinaison convexe. Montrer que:

$$f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k a_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k f(a_k)$$

Que dire si f est concave?

(2) Soit $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Montrer que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left(\prod_{k=0}^n |a_k|\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n |a_k|$$

(3) Montrer l'inégalité d'entropie: si $(p_1, \dots, p_n)$ et $(q_1, \dots, q_n)$ sont deux combinaisons convexes, alors:

$$\sum_{i=1}^n p_i \ln(q_i) \leq \sum_{i=1}^n p_i \ln(p_i)$$

3. Une inégalité de produits. _____

(1) En introduisant une fonction bien choisie, montrer que pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$:

$$1 + \left(\prod_{k=1}^n x_k\right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\prod_{k=1}^n (1 + x_k)\right)^{\frac{1}{n}}$$

(2) En déduire que pour tout $(a_1, \dots, a_n)$ et $(b_1, \dots, b_n)$ n -uplets strictement positifs on a:

$$\left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\prod_{k=1}^n b_k\right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\prod_{k=1}^n (a_k + b_k)\right)^{\frac{1}{n}}$$

4. Fonctions convexes bornées sur $\mathbb{R}$. _____ ✓

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe bornée. Montrer que f est constante.

5. Inégalité sommatoire. _____

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable convexe tel que $f(0) = 0$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} f'(k) \leq f(n) \leq \sum_{k=1}^n f'(k)$$

6. Inégalité de Jensen intégrale. _____

Soient I un intervalle, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ convexe continue et $g : [a, b] \rightarrow I$ continue. Montrer :

$$f\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b g(t) dt\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f \circ g(t) dt$$

7. Inégalité entropique. _____

Soit $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ convexe et dérivable sur I , un intervalle réel d'intérieur non vide.

(1) Montrer : $\forall a \in I, \forall x \in I, \varphi(x) \geq \varphi(a) + (x-a)\varphi'(a)$.

(2) Pour $f : [0, 1] \rightarrow I$ continue, établir : $\varphi\left(\int_0^1 f(t) dt\right) \leq \int_0^1 \varphi \circ f(t) dt$.

(3) Soit $(f, g) \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}_+^*)$ tel que l'intégrale sur $[0, 1]$ de f et de g soient égales à 1. Montrer :

$$\int_0^1 f(t) \ln(f(t)) dt \geq 0 \text{ et } \int_0^1 f(t) \ln(f(t)) dt \geq \int_0^1 f(t) \ln(g(t)) dt$$

Remarque : cette dernière inégalité est la version "continue" de l'inégalité d'entropie obtenue à la question 3 de l'exercice 2 de ce chapitre.

8. Condition suffisante de convexité. _____

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$. Montrer que f est convexe.

9. DL de (H_n) (1). _____

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Montrer qu'il existe $\gamma \in]0, 1[$, $H_n - \ln(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \gamma$.

Indication : utiliser (voire redémontrer) le résultat de l'exercice 5.

Remarque : γ est une constante très célèbre en analyse et porte le nom de constante d'Euler-Mascheroni. L'exercice 1 du chapitre sur les suites traite du même sujet mais nous nous focaliserons ici sur des résultats de convexité.

10. Inégalité logarithmique. _____

Montrer que pour tout $(a, b) \in [1, +\infty[$, $\sqrt{\ln(a) \ln(b)} \leq \ln\left(\frac{a+b}{2}\right)$

11. $\min(f, g), \max(f, g)$. _____ 

Soient f et g deux fonctions convexes. Que dire de $\max(f, g)$ et $\min(f, g)$? Qu'en est-il si f et g sont concaves ?

12. Continuité de fonctions convexes. _____ 

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ convexe. Discuter de la continuité de f selon la topologie de I (ouvert ou fermé).

13. Extrema de fonctions convexes. _____ ✓ 

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convexe. On suppose que f admet un extremum en $a \in \mathbb{R}$.

- (1) Que dire s'il s'agit d'un minimum local ?
- (2) Que dire s'il s'agit d'un maximum local ?
- (3) Que dire s'il s'agit d'un maximum global ?

14. Fonctions convexes croissantes sur $\mathbb{R}$. _____ ✓

Montrer qu'une fonction convexe et croissante sur $\mathbb{R}$ est soit constante soit divergente en $+\infty$.

15. Conditions de convexité. _____ *

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Montrer que $x \mapsto f(1/x)$ est convexe si et seulement si $x \mapsto xf(x)$ l'est.

16. Théorème de Gauss-Lucas. _____  * 

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$. On note $\xi(\mathbb{C})$ l'ensemble des parties convexes de $\mathbb{C}$.

- (1) Soit $(C_i)_{i \in I}$ une famille de parties convexes de $\mathbb{C}$. Montrer que:

$$\bigcap_{i \in I} C_i \in \xi(\mathbb{C})$$

- (2) En déduire que la plus petite partie convexe de $\mathbb{C}$ contenant Ω est:

$$\text{Conv}(\Omega) = \bigcap_{\Omega \subset C \in \xi(\mathbb{C})} C$$

- (3) Soit $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$. Montrer l'égalité:

$$\text{Conv}(\{z_1, \dots, z_n\}) = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i z_i, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}_+^n \right\}$$

- (4) En déduire le théorème de Gauss-Lucas : $\forall P \in \mathbb{C}[X], Z_{\mathbb{C}}(P') \subset \text{Conv}(Z_{\mathbb{C}}(P))$ (où $Z_{\mathbb{C}}(P)$ désigne l'ensemble des racines de P dans $\mathbb{C}$, de même pour P').

17. Ensemble de points de dérivabilité d'une fonction convexe. _____

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Montrer que l'ensemble des points de non dérivabilité de f est au plus dénombrable.

18. Positivité d'une intégrale à poids convexe. _____

Soit $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et continue. Montrer que $\int_0^{2\pi} f(x) \cos(x) dx \geq 0$

19. Convexité logarithmique. _____ *

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction. Montrer que $\ln(f)$ est convexe si et seulement si, pour tout $\alpha > 0$, f^α est convexe ($f^\alpha(x) = f(x)^\alpha$).

Indication : montrer que si f est convexe croissante et g est convexe, alors $f \circ g$ est convexe.

20. Inégalité intégrale. _____

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ convexe et dérivable. Montrer l'inégalité suivante :

$$0 \leq \frac{f(1) + f(0)}{2} - \int_0^1 f(t) dt \leq \frac{f'(1) - f'(0)}{8}$$



“If there is a problem you can’t solve, then there is an easier problem you can’t solve: find it.” - George Pólya

12. Polynômes

1. Racines de P . _____

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que $a \in \mathbb{K}$ est une racine de P si et seulement si $X - a$ divise P .

2. Division euclidienne. _____

(1) Donner une CNS sur p et q pour que $A(X) = X^3 + pX + q$ admette un zéro multiple.

(2) Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère le polynôme $P = \prod_{k=1}^n (X \sin(ka) + \cos(ka))$. Calculer le reste de la division euclidienne de P par $X^2 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

3. P à racines simples. _____

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme simplement scindé a racines dans $\mathbb{R}$. Montrer que P' est simplement scindé.

4. Quelques calculs de sommes sur les racines. _____

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme scindé a racines simples tel que $P(0) \neq 0$. En notant $Z_{\mathbb{C}}(P)$ l'ensemble des racines complexes de P , calculer:

$$\sum_{\lambda \in Z_{\mathbb{C}}(P)} \frac{1}{\lambda}, \quad \sum_{\lambda \in Z_{\mathbb{C}}(P)} \frac{1}{\lambda^2}, \quad \sum_{\lambda \in Z_{\mathbb{C}}(P)} \frac{1}{P'(\lambda)\lambda}$$

5. L'inégalité $(P')^2 \geq PP''$. _____

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé dans $\mathbb{R}$. Montrer que $(P')^2 \geq PP''$

6. Nombre de Liouville. _____

On dit que $\alpha \in \mathbb{R}$ est un nombre algébrique s'il existe un polynôme $P \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $P(\alpha) = 0$. Dans ce cas, on appelle *degré* de α le degré le plus petit du polynôme de $\mathbb{Q}[X]$ qui annule α .

- (1) Montrer qu'un réel α algébrique n'est pas forcément rationnel.
- (2) Montrer que $\alpha \in \mathbb{R}$ est algébrique si et seulement s'il existe un $P \in \mathbb{Z}[X]$ vérifiant $P(\alpha) = 0$
- (3) En déduire que si α est algébrique de degré $n \geq 1$, il existe une constante $C > 0$ tel que pour tout rationnel $p/q \neq \alpha$ avec $q \geq 1$:

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{C}{q^n}$$

- (4) On pose $\ell = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^k!}$. Montrer que ℓ n'est pas algébrique.

7. L'équation $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$. _____

Déterminer les solutions de $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$ dans $\mathbb{K}[X]$.

8. L'espace $\mathbb{K}[A]$ pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. _____

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose qu'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(A) = 0$ (on dit que P est annulateur de A). On pose $d = \deg(P)$ et on définit la famille suivante :

$$\mathcal{F} = \{A^k, k \in \llbracket 0, d-1 \rrbracket\}$$

- (1) Montrer que pour tout $N \geq d$, A^N est engendré par $\mathcal{F}$ (c'est à dire A^N s'écrit comme une combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{F}$).
- (2) On note d_0 le degré minimal des polynômes annulateurs de A . Justifier l'existence de d_0 .
- (3) Montrer les puissance A^N avec $N < d_0$ ne peuvent s'écrire comme des combinaisons linéaires de puissance de A^k avec $k < d_0 - 1$.

9. Une inégalité de pré-image. _____

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant et $E \subset \mathbb{C}$ fini non vide. Montrer que $P^{-1}(E) \geq (|E| - 1) \deg(P) + 1$

10. Somme de dérivées. _____

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n , positif sur $\mathbb{R}$. Montrer que $P + P' + \dots + P^{(n)} \geq 0$ sur $\mathbb{R}$.

11. CNS pour que $P \in \mathbb{R}[X]$ soit positif sur $\mathbb{R}$. _____

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme positif sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe deux polynômes à coefficients réels tels que $P = A^2 + B^2$.

12. Écriture binaire polynomiale. _____

Montrer que tout entier relatif s'écrit de façon unique comme un $P(-2)$ où $P \in \{0, 1\}[X]$.

13. Inégalité de Cauchy. _____

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré n et unitaire. On note $Z_{\mathbb{C}}(P)$ ses racines complexes. On note

$$P(X) = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$$

(1) Montrer que pour tout $\zeta \in Z_{\mathbb{C}}(P)$ différent de 0, on a :

$$|\zeta| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|a_{n-k-1}|}{|\zeta|^k}$$

(2) En déduire que pour tout $\zeta \in Z_{\mathbb{C}}(P)$:

$$|\zeta| \leq 1 + \max(|a_0|, \dots, |a_{n-1}|)$$

Remarque: On obtient alors une démonstration facile que les polynômes de l'exercice 12 ont tous leurs racines dans le disque fermé centré en 0 de rayon 2.

14. Théorème de Pólya. _____

Soit P un polynôme complexe unitaire de degré $n \geq 1$. On note $\mathcal{C} := \{z \in \mathbb{C}, |p(z)| \leq 2\}$. Nous allons démontrer un théorème du au mathématicien hongrois George Pólya. Il énonce que, pour toute droite L du plan complexe, si l'on note $\mathcal{C}_L$ la projection orthogonale de $\mathcal{C}$ sur L . On a :

$\mathcal{C}_L$ est une réunion finie de segments du plan complexe de longueur totale inférieure ou égale à 4.

- (1) Montrer que l'on peut considérer que L est la droite réelle sans perdre de généralité.
- (2) On considère P un polynôme scindé à racines réelles. Montrer que toute racine double de P' est racine de P .
- (3) Montrer de plus que $(P')^2 \geq PP''$.

Puisque l'on peut considérer $L = \mathbb{R}$, on considère $P \in \mathbb{C}[X]$ et on le scinde en prenant sa "partie à coefficients réels" comme suit :

$$P = \prod_{k=1}^n (X - c_k) \text{ où l'on pose } c_k = a_k + ib_k \text{ et } R := \prod_{k=1}^n (X - a_k)$$

- (4) On pose $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}, |R(x)| \leq 2\}$. Montrer que $\text{Re}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{P}$.
- (5) Pour alléger les notation, on considère P réel (donc $P = R$ puisque P est scindé) et que $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}, |P(x)| \leq 2\}$. Montrer alors que si $P \leq 2$ sur un segment $[a, b]$, on a $b - a \leq 4$.

Indication : nous invitons le lecteur à utiliser le théorème de Tchebychev, démontré dans l'exercice 19 du chapitre sur les nombres complexes.

- (6) Justifier que $\mathcal{P}$ s'écrit comme une réunion disjointes de segments. Montrer de plus qu'elle est finie.

On écrit alors : $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}, |P(x)| \leq 2\} = \bigcup_{k=1}^m I_k$ où tout I_k est un segment de $\mathbb{R}$

On suppose de plus que cette notation est ordonnée, i.e. : $\forall k \in \mathbb{N}_{m-1}, \forall (x, y) \in I_k \times I_{k+1}, x < y$

- (7) Montrer que tout segment I_k contient une racine de P .
- (8) Construire un polynôme $\tilde{P}$ tel que l'ensemble $\tilde{\mathcal{P}}$ associé est un segment de longueur supérieure à la somme des longueurs des I_k .

Indication : une stratégie serait d'essayer de recoller les I_k entre eux.

- (9) Conclure.

15. Barycentre des racines.

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geq 1$.

- (1) On note $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ les racines de P comptées avec leur multiplicité et $\beta_1, \dots, \beta_{n-1}$ les racines de P' comptées avec leur multiplicité. On note $A_1, \dots, A_n$ les affixes respectives des racines de P et $B_1, \dots, B_{n-1}$ celles des racines de P' . Montrer que ces points ont le même isobarycentre.
- (2) En déduire que:

$$-\frac{[P]_{n-1}}{[P]_n} = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$$

16. Un oral des mines.

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Est-ce qu'il existe toujours un $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $P - \lambda$ est scindé à racines simples?

17. Conjugués dans $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$. _____

Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $P(\sqrt{2}) = 0$. Montrer que $P(-\sqrt{2}) = 0$.

18. Polynômes qui vérifient $P(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$. _____

Trouver tout les polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant $P(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$.

19. Nombres transcendants. _____

On rappelle que l'on nomme transcendant tout complexe n'étant pas racine d'un polynôme $P \in \mathbb{Q}[X]$.

- (1) Montrer que tout transcendant est irrationnel et donner un exemple d'irrationnel n'étant pas transcendant (ces nombres sont dits algébriques).
- (2) Montrer qu'il suffit d'étudier les polynômes à coefficients entiers pour conclure sur la transcendance d'un complexe donné.
- (3) Montrer que pour $\alpha \in \mathbb{C}^*$, α est transcendant si et seulement si $1/\alpha$ l'est.
- (4) On admet la transcendance de π . Montrer que $\pi + 1/\pi$ est irrationnel.

20. Polynômes réciproques. _____

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}$. On considère le polynôme $P^\dagger$ défini par $P^\dagger = \overline{X^n P(1/X)}$. On l'appelle polynôme réciproque de P (ou polynôme palindromique de P si $P \in \mathbb{R}[X]$). Enfin on dit que P est réciproque (ou palindromique dans $\mathbb{R}$) si $P = P^\dagger$. Démontrons quelques propriétés (indépendantes dans cette exercice) de cette transformation.

- (1) Quel modification apparaît-il lors du passage de P à $P^\dagger$ (et vice-versa) ? Exprimer alors les coefficients de $P^\dagger$ en fonction de ceux de P .
- (2) Montrer que tout polynôme palindromique de degré impaire admet -1 comme racine.
- (3) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ palindromique. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}^*$:

$$\forall z \in \mathbb{U}, P(z) = |C| \prod_{|\alpha|=1} |z - \alpha|^2 \prod_{0 < |\beta| < 1} |z - \beta|^2$$

- (4) Soit $z \in \mathbb{U}$ algébrique (c'est à dire racine d'un polynôme $P \in \mathbb{Q}[X]$). On pose alors P un tel polynôme, et on le suppose de degré minimal et unitaire. Montrer que $P = \pm P^\dagger$

21. Polynômes qui vérifient $P(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$. _____

Déterminer tout les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant $P(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$.



“Geometry can in no way be viewed as a branch of mathematics; instead, geometry relates to something already given in nature, namely, space. I realized that there must be a branch of mathematics which yields in a purely abstract way laws similar to geometry.”

- Hermann Grassmann

13. Espaces vectoriels et dimensions

1. Quelques familles libres. _____

- (1) Montrer que la famille $(x \mapsto \cos(nx))_{n \in \mathbb{N}}$ est libre dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- (2) Soit $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ une suite injective de réels. Montrer que pour tout $\Lambda \subset \mathbb{N}$, $(x \mapsto \cos(\lambda_n x))_{n \in \Lambda}$ forme une famille libre dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- (3) Montrer que $(x \mapsto e^{ax})_{a \in \mathbb{R}}$ est libre dans $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.
- (4) Montrer que $(x \mapsto |x - a|)_{a \in \mathbb{R}}$ est libre dans $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.

2. Quelques espaces vectoriels engendrés. _____

- (1) Déterminer l'espace vectoriel engendré par $\{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)\}$.
- (2) Déterminer l'espace vectoriel engendré par $\{P \in \mathbb{R}[X], P \geq 0\}$.
- (3) Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $F \subset E$ un sous espace vectoriel. Déterminer l'espace vectoriel engendré par $E \setminus F$.

3. Formule de Grassmann. _____

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et A, B deux sous espaces vectoriels de E . Montrer la formule de Grassmann:

$$\dim(A + B) = \dim(A) + \dim(B) - \dim(A \cap B)$$

4. Théorème de Carathéodory. ✍️💡🎓💎

Soit $n \geq 1$. On va montrer le théorème de Carathéodory dans le cas générale, dont l'énoncé est le suivant:

Pour toute partie C de $\mathbb{R}^n$, l'enveloppe convexe est engendré par les barycentre d'au plus $n + 1$ points.

On reprend les notations de l'exercice 16 du chapitre 11 et on fixe $C \subset \mathbb{R}^n$

(1) Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, On note $\mathcal{C}_p$ les combinaisons convexes de p points de C . Montrer que:

$$\text{Conv}(C) \subset \bigcap_{p \geq 1} \mathcal{C}_p$$

(2) Prenons alors $p > n + 1$ et $(a_1, \dots, a_p) \in C^p$. Justifier que la famille $(a_2 - a_1, \dots, a_p - a_1)$ est liée.

(3) En déduire l'existence d'une famille $(\beta_k)_{1 \leq k \leq p}$ de réels non tous nuls vérifiant $\sum_{k=1}^p \beta_k a_k = 0$.

(4) On note $\Lambda = \sum_{k=1}^p \lambda_k a_k \in \mathcal{C}_p$ une combinaison convexe des $a_1, \dots, a_p$ et $J = \{1 \leq j \leq p, \beta_j > 0\}$.

En posant $\gamma = \min_{j \in J} \{\lambda_j / \beta_j\}$, montrer que $\Lambda \in \mathcal{C}_{p-1}$. Conclure.

Remarque: On en déduit qu'un corollaire immédiat de ce théorème est que si C est compact, alors son enveloppe convexe l'est aussi.

5. Un overlap. ✓

Soit E un espace vectoriel de dimension n et deux sous-espaces vectoriels F et G de dimension $\lfloor n/2 \rfloor + 1$. Montrer que $F \cap G \neq \{0\}$.

6. L'espace des matrices à trace nulle. 💡

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'ensemble des matrices carrées de taille n et de trace nulle est un espace vectoriel. En donner sa dimension et deux base distinctes.

7. Quelques propriétés de sous espaces vectoriels. ✓✍️

Soient E, F et G trois espaces vectoriels. Montrer :

$$(1) E \cap F = E + F \iff E = F$$

$$(2) \quad G \subset F \implies F \cap (E + G) = F \cap E + G$$

$$(3) \quad F \cup G \text{ est un espace vectoriel} \iff F \subset G \text{ ou } G \subset F$$

8. Existence d'espaces vectoriels finis. _____ ✓

Existe-t-il des espaces vectoriels finis ?

9. Une base célèbre. _____ ✎

Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}_n[X]$. Montrer que E admet une base dont tous les éléments sont de même degré et une autre dont tous les éléments sont de degré différents.

10. Familles libres engendrées par (f_i) . _____ ✓ ✎

Soit E un espace vectoriel et $\mathcal{F} = (f_i)_{i \in \mathbb{N}_n}$ une famille libre de E . Que dire de la liberté des familles suivantes :

$$(1) \quad (f_i + f_1)_{i \in \mathbb{N}_n}$$

$$(2) \quad (f_i - f_{i+1})_{i \in \mathbb{N}_n} \text{ où } f_{n+1} := f_1$$

$$(3) \quad (f_i + f_{i+1})_{i \in \mathbb{N}_n} \text{ où } f_{n+1} := f_1$$

$$(4) \quad \left(\sum_{k=1}^i f_k \right)_{i \in \mathbb{N}_n}$$

11. Espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. _____ ✎

On note $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et on pose $a \in \mathbb{R}$.

(1) Soit C l'ensemble des fonctions réelles constante et N_a l'ensemble des fonctions nulles en a . Montrer que C et N_a sont supplémentaires dans E .

(2) Plus généralement, on pose $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ une famille de réels deux à deux distincts et $N := \{f \in E, f(a_1) = \dots = f(a_n) = 0\}$. Déterminer un supplémentaire de N dans E .

12. Non unicité de supplémentaire. _____ 🎓

Soit E un espace vectoriel. Montrer qu'un supplémentaire d'un s.e.v. F non trivial (c'est à dire tel que $F \notin \{\{0\}, E\}$) n'est jamais unique.

13. Ensemble de fonctions 1-périodiques. _____ ✎

Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. On pose P l'ensemble des fonctions réelles 1-périodiques et L l'ensemble des fonctions de limite nulle en $+\infty$.

- (1) Montrer que P et L sont deux s.e.v. de E .
- (2) Montrer que $P \cap L = \{0\}$.
- (3) P et L sont-ils supplémentaires dans E ?

14. Rangs pairs et impairs d'une suite. _____ ✎

Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On pose les deux ensembles suivants :

$$P := \{u \in E, u_{2n} = 0\} \quad \text{et} \quad I := \{u \in E, u_{2n} = u_{2n+1}\}$$

Montrer que P et I sont supplémentaires dans E .

15. L'espace des suites arithmétiques complexes. _____ ✓

Montrer que l'ensemble des suites arithmétiques complexes est espace vectoriel. En donner sa dimension ainsi qu'une base.

16. Un sous espace de $\mathbb{R}^{[-1,1]}$. _____ ✓

Soit E l'ensemble des fonctions continues sur $[-1, 1]$ affines sur $[-1, 0]$ et sur $[0, 1]$. Montrer que E est un espace vectoriel. Déterminer sa dimension et en donner une base.

17. Une propriété unique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. _____ ✎

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Montrer que $A^2 \in \text{vect}(I_2, A)$ et donner un exemple de matrice $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ telle que $B^2 \notin \text{vect}(I_3, B)$.

18. Application de la formule de Grassmann. _____ ✓

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F et G deux s.e.v. de E . Montrer que, parmi ces trois propositions, soit une seule est vraie soit elles sont vraies simultanément :

- (1) $F \cap G = \{0\}$
- (2) $F + G = E$
- (3) $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$

19. Application dim. _____

Soit E un espace vectoriel de dimension n et S l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E . On considère l'application $d : S \rightarrow \mathbb{N}$ vérifiant :

- Soit $(F, F') \in S^2$ tel que $F \cap F' = \{0\}$. Alors on a $d(F + F') = d(F) + d(F')$.
- $d(E) = n$.

Montrer que $d(F) = \dim(F)$ pour tout $F \in S$.

20. Espaces vectoriels à base unique. _____ ✓

Que dire d'un espace vectoriel admettant une unique base (à permutation près) ?

21. Supplémentaire commun. _____

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F et G deux s.e.v. de E de même dimension. Montrer que F et G admettent un supplémentaire commun.



Jørgen Pedersen Gram

14. Déterminants et groupe symétrique

1. Un déterminant de Hurwitz. _____

Soit $(a, b, r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^{n+2}$. Calculer le déterminant:

$$\begin{vmatrix} r_1 & b & \dots & \dots & b \\ a & r_2 & b & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a & \dots & \dots & r_{n-1} & b \\ a & \dots & \dots & a & r_n \end{vmatrix}$$

2. Le déterminant comme morphisme. _____

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On souhaite montrer l'identité suivante, valable pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$:

$$\det(AB) = \det(A) \det(B)$$

- (1) Traiter le cas A ou B non inversible.
- (2) On fixe désormais $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et on pose:

$$\phi : (\mathbb{R}^n)^n : (C_1, \dots, C_n) \mapsto \det(AC)$$

Avec C la matrice dont les colonnes sont $C_1, \dots, C_n$. Montrer que ϕ est n -linéaire, alternée.

- (3) En déduire le résultat souhaité.

3. Sous groupes G de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tels que $G \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) = \{I_n\}$. _____

Soit G un sous groupe finie de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. On note $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) = \{M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \det(M) = 1\}$. On suppose que $G \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) = \{I_n\}$. Montrer que G est cyclique.

4. Matrices réelles semblables dans $\mathbb{C}$. _____ *

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables dans $\mathbb{C}$, c'est à dire qu'il existe un $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $A = PBP^{-1}$. Montrer que A et B sont semblable dans $\mathbb{R}$.

5. Dérangements pairs et impairs. _____ * ENS

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations de l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$. Pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on note $\varepsilon(\sigma)$ sa signature et $\nu(\sigma)$ le nombre de points fixes. On dit que σ est un dérangement lorsque $\nu(\sigma) = 0$.

- (1) Y'a t-il plus de dérangements paire où impaire?
- (2) Calculer:

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \frac{\varepsilon(\sigma)}{1 + \nu(\sigma)}$$

6. Un déterminant caché. _____

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que, pour tout $1 \leq k \leq n$, $\sum_{i=1}^n z_i^k = 0$. Montrer que $z_1 = \dots = z_n = 0$.

7. Une condition d'inversibilité (2). _____

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, $M \in \mathcal{M}_{2p}(\mathbb{Z})$ tel que tout les coefficients diagonaux sont des entiers paires, et tout les autres coefficients sont impaire. Montrer que $M \in \mathrm{GL}_{2p}(\mathbb{R})$.

8. Déterminants de Smith. _____ ENS *

- (1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $A = (i \wedge j)_{1 \leq i, j \leq n}$. Calculer $\det(A)$.
- (2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $A = (|D(i) \cap D(j)|)_{1 \leq i, j \leq n}$ Avec $D(i)$ l'ensemble des diviseurs de i . Calculer $\det(A)$.

9. Déterminant de Gowers. _____

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $A = \left(\binom{i+j}{i} \right)_{0 \leq i, j \leq n}$. Calculer $\det(A)$.

10. Points fixes de permutations $\sigma^2 = \text{Id}_{\mathbb{N}_n}$. _____

Soit n un entier naturel impair et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telle que $\sigma^2 = \text{id}_{\mathbb{N}_n}$. Montrer que ou bien σ admet un nombre impair de point fixe. Donner un contre exemple lorsque n est pair.

11. Sous espaces stables par u_σ . _____

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Déterminer les s.e.v. de $\mathbb{R}^n$ stable par $u_\sigma : \begin{cases} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) \end{cases}$

(Ici on écrit les vecteurs dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$)

12. Étude du groupe alternée A_n . _____

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on définit $A_n = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \varepsilon(\sigma) = 1\}$, nommé groupe alterné d'indice n .

- (1) Montrer : $(A_n, \circ) < (\mathfrak{S}_n, \circ)$.
- (2) Énumérer les éléments de A_3 et A_4 .
- (3) Pour $n \geq 2$ on fixe τ une transposition de $\mathfrak{S}_n$. Montrer que $\phi : \begin{cases} \mathfrak{S}_n \rightarrow \mathfrak{S}_n \\ \sigma \mapsto \sigma \circ \tau \end{cases}$ établie une bijection.
- (4) Déterminer $|A_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

13. Polynôme caractéristique. _____

- (1) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. On pose $P_n = X^n - X + 1$. Montrer que P_n admet n racines simples dans $\mathbb{C}$ que l'on notera $\{z_1, \dots, z_n\}$.
- (2) On considère $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont le i -ème coefficient diagonal est égal à $1 + z_i$ pour tout $i \in \mathbb{N}_n$ et dont les autres sont égaux à 1. Montrer : $\chi_A(X) := \det(XI_n - A) = P_n - P'_n$.

Remarque : le polynôme $\det(XI_n - A)$ associé à une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un objet omniprésent en algèbre matricielle et se nomme le polynôme caractéristique de A .

14. Positivité d'un déterminant par blocs.

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on considère la matrice par blocs $M = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$. Montrer que $\det(M) \geq 0$.

15. Trace et déterminant de $A \mapsto A^T$.

On pose $n \geq 1$ et $\phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A \mapsto A^T$. Montrer que ϕ est une application linéaire et calculer $\det(\phi)$ et $\text{Tr}(\phi)$.

16. Matrice compagnon.

On considère $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ et la matrice suivante :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Déterminer $\det(XI_n - C)$, i.e. le polynôme caractéristique de C (cf remarque de l'exercice 13 de ce chapitre). Que retrouve-t-on ?

Remarque : la matrice introduite se nomme matrice compagnon du polynôme unitaire associé aux coefficients $-a_1, \dots, -a_{n-1}$.

17. Déterminant circulant.

On fixe $n \geq 1$, $\omega = \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right)$.

(1) On note J la matrice:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer que $J^n = I_n$ et en déduire que pour tout $\zeta \in \mathbb{U}_n$, $\{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}), JX = \zeta X\}$ est une droite vectorielle.

(2) En déduire que J est semblable à la matrice diagonale $\text{diag}(1, \omega, \dots, \omega^{n-1})$.

(3) Soient $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Déterminer le déterminant de la matrice suivante :

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_2 & a_3 & \dots & a_n & a_1 \end{pmatrix}$$

Remarque : La matrice M introduite se construit en décalant à chaque rang la ligne composée des coefficients $a_1, \dots, a_n$. Une telle matrice est dite *circulante*.

18. Déterminant de Cauchy.



Soient $(a_1, \dots, a_n)$ et $(b_1, \dots, b_n)$ deux n -tuplets complexes tels que, pour tout $1 \leq i, j \leq n$, $a_i + b_j \neq 0$. Calculer $\det \left(\left(\frac{1}{a_i + b_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n} \right)$.

19. Un déterminant classique.



Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer :

$$\begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & \dots & n^2 \\ (n+1)^2 & (n+2)^2 & \dots & (2n)^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [n(n-1)+1]^2 & [n(n-1)+2]^2 & \dots & (n^2)^2 \end{vmatrix}$$

20. Déterminant binomial.



Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer :

$$\begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{1} & \dots & \binom{n}{n} \\ \binom{0}{1} & \binom{1}{2} & \dots & \binom{n}{n+1} \\ \binom{1}{0} & \binom{2}{1} & \dots & \binom{n+1}{n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{n}{0} & \binom{n+1}{1} & \dots & \binom{2n}{n} \end{pmatrix}$$

21. Résultante de deux polynômes.



- (1) Soient A, B deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$, $A = \sum_{k=0}^p a_k X^k$ et $B = \sum_{k=0}^q b_k X^k$ avec $p, q \geq 1$. Montrer que A et B n'ont pas de racines complexes en commun si et seulement si le déterminant $R(A, B)$ est non nul, appelé résultant des polynômes:

$$R(A, B) = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & \cdots & 0 & b_0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_1 & a_0 & \ddots & 0 & b_1 & b_0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_0 & b_q & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_p & \vdots & \ddots & a_1 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & b_0 \\ 0 & a_p & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_p & 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_{q-1} \\ & & & & & & & & b_q \end{vmatrix}$$

Indication: On pourra considérer l'application linéaire $\phi_{A,B} : \mathbb{C}_{p-1}[X] \times \mathbb{C}_{q-1}[X] \rightarrow \mathbb{C}_{p+q-1}[X]$ et qui à (U, V) associe $BU + AV \dots$

- (2) Montrer que si $A, B, C \in \mathbb{C}[X]$ tous de degré ≥ 1 alors $R(A, BC) = R(A, B)R(A, C)$.
- (3) En déduire que:

$$R(A, B) = a_p^q \prod_{i=1}^p B(\lambda_i)$$

Avec $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les racines complexes de A non comptés avec leur multiplicité.



Yasuo Akizuki, Claude Chevalley et Akira Kobori

15. Endomorphismes

Dans toute cette section, $n \geq 1$ (sauf si spécifié autrement) est un entier et E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie de dimension n .

1. Diagonalisabilité des projecteurs. _____ ✎ ✓

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ tel que $p \circ p = p$. On note P sa représentation matricielle dans la base canonique.

- (1) Montrer que $r := \text{rg}(p) = \text{Tr}(p)$
- (2) Montrer qu'il existe une matrice $G \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que:

$$P = G \begin{pmatrix} I_r & O_{r,n-r} \\ O_{n-r,r} & O_{n-r,n-r} \end{pmatrix} G^{-1}$$

2. Endomorphismes nilpotents de rangs maximaux. _____ ✎ ✓

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent d'ordre n (c'est à dire $f^k = 0$ si et seulement si $k \geq n$). Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E tel que dans cette base la représentation matricielle de f noté F soit la matrice:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Théorème de Maschke.

On souhaite montrer le théorème de Maschke:

Soit G un sous groupe fini de $GL_n(\mathbb{R})$, $F \subset E$ un sous espace vectoriel stable par tout les éléments de G (on dit que G stabilise F). Alors F admet un supplémentaire stable par G .

On adopte donc les notations de l'énoncé du théorème, et soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur dont l'image est F .

(1) On pose $\pi = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \circ p \circ g^{-1}$. Montrer que π est un projecteur et déterminer son image.

(2) En déduire le théorème de Maschke.

Cette astuce de poser π comme une sorte de moyenne est appelée... l'astuce de la moyenne. Elle apparaît beaucoup, autant à l'écrit qu'à l'oral. On la mobilisera encore plus tard pour l'étude des sous groupes finis de $GL_n(\mathbb{R})$ (Exercice 5 du chapitre suivant)...

4. Inversion de Pascal.

On souhaite montrer l'inversion de Pascal: si (a_n) et (b_n) sont deux suites complexes tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_k$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} a_k$.

(1) On pose $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$ l'application qui à $P(X) \mapsto P(X+1)$. Montrer que ϕ est bien linéaire, inversible, et déterminer son inverse.

(2) En déduire l'inversion de Pascal.

(3) On note $\mathcal{D}_n$ le nombre de dérangements de $\mathfrak{S}_n$, c'est à dire le nombre de permutations n'ayant pas de points fixes. Déterminer une expression de $\mathcal{D}_n$ en fonction de n .

5. Une égalité de projecteurs.

Soient p, q, r trois projecteurs de E tels que $p = \sqrt{2}q + \sqrt{3}r$. Montrer que $p = q = r = 0$.

6. Hyperplans de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit H un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $H \cap GL_n(\mathbb{R}) \neq \emptyset$.

7. Crochet de rang 1.

Soient $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que $[f, g] = f \circ g - g \circ f$ soit de rang 1. Que dire de $[f, g]^2$?

8. Automorphisme polynomial. ✓

Montrer que $\Pi : \begin{cases} \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X] \\ P \mapsto P \circ (X + 1) + P \end{cases}$ est un automorphisme.

9. Interpolation de Bernstein. ✓

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $(B_k^n)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket} = \left(\binom{n}{k} X^k (1 - X)^{n-k} \right)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$.

(1) Montrer que cette famille est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

(2) Montrer que $B : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}[X] \\ P \mapsto \sum_{k=0}^n B_k^n P\left(\frac{k}{n}\right) \end{cases}$ est un automorphisme.

Remarque : on étudie ici la famille des polynômes de Bernstein d'ordre n , déjà introduits dans l'exercice 16 du chapitre des fonctions continues (théorème de Weierstrass).

10. Constructions d'un projecteur. ✓

Soient E un $\mathbb{R}$ -e.v. et p, q deux projecteurs de E tels que $\text{Im } p \subset \text{Ker } q$.

- (1) Montrer que $\text{Im } p \cap \text{Im } q = \{0\}$
- (2) On pose $r = p + q - p \circ q$. Montrer que r est un projecteur et déterminer son image et son noyau.

11. Logique des noyaux et des images. ✓

Soient E un e.v. et $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$. Montrer les équivalences suivantes :

- (1) $\text{Ker } g \circ f = \text{Ker } f \iff \text{Ker } g \cap \text{Im } f = 0$
- (2) $\text{Im } g \circ f = \text{Im } g \iff E = \text{Ker } g + \text{Im } f$

12. Condition de codiagonalisabilité.

Soient u et v deux endomorphismes de E vérifiant $u \circ v = v \circ u$.

- (1) Montrer que $\text{Ker}(u)$ et $\text{Im}(u)$ sont stables par v .
- (2) Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on note $E_\lambda = \text{Ker}(u - \lambda Id)$. On dit que λ est une valeur propre de u si $E_\lambda \neq \{0\}$ et on note $\text{Sp}(u)$ l'ensemble des valeurs propres de u .

Montrer que E_λ est stable par v pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.

- (3) On dit que u est diagonalisable si $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda$. Montrer que la somme est toujours directe.

- (4) Montrer que si u et v sont diagonalisables, alors $v|_{E_\lambda}$ est diagonalisable sur E_λ . Conclure.

13. Noyau et image supplémentaires. _____

Soient E et F deux espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, E)$ vérifiant : $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$.

- (1) Montrer que $\text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(g) = E$.
- (2) On pose $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $F = \mathbb{R}_{n-1}[X]$, puis : $f(P) = P'$ et $g(P) : x \mapsto \int_0^x P(t)dt$. Montrer que f et g vérifient les conditions de l'énoncé. Ces fonctions sont-elles inversibles ?

14. Lemme de factorisation. _____

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.

- (1) Lemme de factorisation : Soit $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que $\text{ker}(f) \subset \text{ker}(g)$. Montrer qu'il existe $h \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $g = h \circ f$.
- (2) On suppose désormais E de dimension finie et on considère A, B deux sous-espaces vectoriels de E tels que : $\dim(A) + \dim(B) = \dim(E)$. Fabriquer un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\text{ker}(f) = A$ et $\text{Im}(f) = B$.

15. Relation entre endomorphismes. _____

Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel. On s'intéresse à $f \in \mathcal{L}(E)$ et p un projecteur de E . On suppose qu'il existe $(\lambda, \mu) \in (\mathbb{C} \setminus \{0, -1\}) \times \mathbb{C}$ tel que : $f \circ p - p \circ f = \lambda f + \mu p$. Montrer que $\text{Ker}(p) \subset \text{Ker}(f)$.

16. Inégalité de Sylvester. _____

Soit E, F, G trois espaces vectoriels de dimension finie et $n = \dim(F)$. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Montrer que :

$$\text{rg}(f) + \text{rg}(g) - n \leq \text{rg}(g \circ f)$$

17. Caractérisation des homothéties. _____

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout $x \in E$, $u(x)$ est colinéaire à x . Montrer que u est une homothétie.

18. Commutativité et noyaux en somme directe. _____

Soient $(u, v) \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$ et $\ker(u) \cap \ker(v) = \{0\}$. Montrer que pour tout $(i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $\ker(u^i) \cap \ker(v^j) = \{0\}$

19. Un endomorphisme de $\mathbb{C}$. _____

Soient $a, b \in \mathbb{C}$ et $f_{a,b} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $f_{a,b}(z) = az + b\bar{z}$.

- (1) Vérifier que $f_{a,b}$ est un endomorphisme du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}$.
- (2) Calculer le déterminant de $f_{a,b}$ en fonction de a et b .
- (3) Inversement, soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ un endomorphisme du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}$. Montrer qu'il existe d'uniques nombres complexes a et b tels que $f = f_{a,b}$.
- (4) Déterminer les complexes a, b pour lesquels $f_{a,b}$ désigne une symétrie vectorielle.

20. Endomorphismes cycliques. _____ *

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$. On appelle polynôme minimal de f le polynôme unitaire $\Pi_f \in \mathbb{K}[X]$ qui engendre l'idéal $\{P \in \mathbb{K}[X], P(f) = 0\}$. Pour $x \in E$, on note $\mathbb{K}[x] = \{P(f)(x), P \in \mathbb{K}[X]\}$, et Π_x le polynôme minimal analogue à x , engendrant l'idéal $\{P \in \mathbb{K}[X], P(f)(x) = 0\}$.

- (1) Justifier l'existence de Π_f , Π_x et que les ensembles qui les définissent sont bien des idéaux.
- (2) Montrer que $\mathbb{K}[x]$ est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel et déterminer sa dimension.
- (3) Soit $(x, y) \in E^2$. Montrer que si $\mathbb{K}[x] \cap \mathbb{K}[y] = \{0\}$ alors $\Pi_{x+y} = \Pi_x \vee \Pi_y$. Généraliser le résultat à p vecteurs $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$.
- (4) Montrer que si $\Pi_x \wedge \Pi_y = 1$ alors $\mathbb{K}[x + y] = \mathbb{K}[x] \oplus \mathbb{K}[y]$. Généraliser le résultat à p vecteurs $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$.
- (5) Pour cette question, on admettra le lemme de décomposition des noyaux (démontré à l'exercice 15 chapitre 21), affirmant que si $(P_1, \dots, P_m) \in \mathbb{K}[X]^m$ sont deux à deux premiers entre eux, alors on a :

$$\ker \left(\prod_{i=1}^m (P_i)(f) \right) = \bigoplus_{i=1}^m \ker(P_i(f))$$

Soit Q un facteur irréductible unitaire de Π_f et α sa multiplicité dans l'écriture factorisée de Π_f . Montrer qu'il existe un $x \in \ker(Q^\alpha(f))$ tel que $\Pi_x = Q^\alpha$.

- (6) Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $\Pi_x = \Pi_f$.
- (7) On dit que $f \in \mathcal{L}(E)$ est cyclique lorsqu'il existe un $x \in E$ tel que $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est une base. Montrer que f est cyclique si et seulement si $\deg(\Pi_f) = n$.

21. Espace vectoriel engendré par les nilpotents. _____ *

Déterminer l'espace vectoriel engendré par les endomorphismes nilpotents de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.



“What has been affirmed without proof can also be denied without proof.”
 - Euclide d’Alexandrie

16. Espaces euclidiens

Dans toute cette section, sauf si spécifié autrement, $n \geq 1$ est un entier et E un espace euclidien de dimension n muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

1. Inégalité de Cauchy-Schwarz. _____

En étudiant un polynôme du second degré, montrer l’inégalité Cauchy Schwarz :

$$\forall (x, y) \in E^2, |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

Déterminer les cas d’égalité.

2. Endomorphismes symétrique et antisymétrique commutatifs. _____ ✓

On considère $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que $[f, g] = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et que les matrices de f et g dans une base orthogonale $\mathcal{B}$ soient respectivement symétrique et antisymétrique. On dit alors que f et g sont respectivement symétrique et antisymétrique.

- (1) Montrer : $\forall x \in E, \langle f(x), g(x) \rangle = 0$.
- (2) En déduire : $\forall x \in E, \|(f + g)(x)\| = \|(f - g)(x)\|$.

3. Caractérisation des projections orthogonales. _____

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. Montrer que p est orthogonal si et seulement si pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$

4. Un produit scalaire discret. _____

Soit $(a_n) \in [0, 1]^{\mathbb{N}}$. On considère:

$$[\cdot, \cdot] : \begin{cases} \mathcal{C}([0, 1]) \times \mathcal{C}([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) \mapsto [f, g] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(a_n)g(a_n)}{2^n} \end{cases}$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur la suite (a_n) pour que $[\cdot, \cdot]$ définissent un produit scalaire sur $\mathcal{C}([0, 1])$

5. Sous groupes finies de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. _____

- (1) Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, G un sous groupe fini de $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \times)$. Montrer que G est conjugué à un sous groupe de $\mathcal{O}_n(\mathbb{K})$.
- (2) En déduire que tout sous groupe fini de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ est engendré par au plus deux éléments.

6. Quelques inégalités sur les matrices. _____

On définit sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ le produit scalaire $\varphi : (A, B) \mapsto \mathrm{Tr}(A^T B)$.

- (1) Montrer qu'il s'agit bien d'un produit scalaire.
- (2) Soit $(N, M) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})^2$. Montrer que $\mathrm{Tr}(N^{-1}M) \leq n$.
- (3) Soit $(A, B) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^2$. Montrer que :
 - $\mathrm{Tr}(AB)^2 \leq \mathrm{Tr}(A^2)\mathrm{Tr}(B^2)$
 - $\mathrm{Tr}((AB)^2) \leq \mathrm{Tr}(A^2B^2)$
 - $\mathrm{Tr}((AB + BA)^2) \leq 4\mathrm{Tr}(A^2B^2)$

7. Vecteurs à angles obtus. _____

Soit $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$ tel que pour tout $1 \leq i < j \leq p$, $\langle x_i | x_j \rangle < 0$. Montrer que $p \leq n + 1$.

8. Inégalité d'Hadamard.



Soit $A = [C_1, \dots, C_n] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice dont les colonnes sont $(C_1, \dots, C_n) \in (\mathbb{R}^n)^n$. Montrer que:

$$|\det(A)| \leq \prod_{i=1}^n \|C_i\|$$

Avec $\|\cdot\|$ la norme euclidienne canonique.

9. Représentation de Riesz.



Soit f une forme linéaire sur E .

(1) Montrer le théorème de représentation de Riesz :

$$\exists! a \in E, f : x \mapsto \langle x, a \rangle$$

(2) Soit $n \in \mathbb{N}$, $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ deux à deux distincts. Pour tout $(A, B) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, on pose:

$$\langle A|B \rangle = \sum_{k=0}^n A(a_k)B(a_k)$$

Montrer que $\langle \cdot | \cdot \rangle$ définit bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$. En déduire, sans expliciter, l'existence d'un unique $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que, pour tout $Q \in \mathbb{R}_n[X]$:

$$\int_0^1 Q(t) dt = \sum_{k=0}^n \lambda_k Q(a_k)$$

(3) Montrer que pour tout $n \geq 1$ il existe $c_n > 0$ tel que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $|P'(0)| \leq c_n \|P\|_{\infty, [-1, 1]}$. Déterminer la limite de (c_n) lorsque $n \rightarrow \infty$.

10. Un produit scalaire continu.



Soit $\omega \in \mathcal{C}([-1, 1])$. Montrer que:

$$\langle \cdot | \cdot \rangle : \begin{cases} \mathcal{C}([-1, 1]) \times \mathcal{C}([-1, 1]) \rightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) \mapsto \int_{-1}^1 f(t)g(t)\omega(t) dt \end{cases}$$

définit un produit scalaire si et seulement si ω est positif et que l'ensemble de ses zéros ne contient aucun intervalle d'intérieur non vide.

11. Le simplexe régulier.



Montrer qu'il existe $(u_0, \dots, u_n) \in E^{n+1}$ vecteurs unitaires tels que :

$$\forall 0 \leq i < j \leq n, \langle u_i | u_j \rangle = -\frac{1}{n}$$

12. Rayon critique de recouvrement par le cross-polytope. _____ ✎ ✱

Pour tout $x \in E$ et $r \geq 0$ on note $B_f(x, r) = \{y \in E, \|x - y\| \leq r\}$. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E . Déterminer l'ensemble:

$$\mathcal{E} = \left\{ r \geq 0, B_f(0, r) \subset \bigcup_{\substack{\varepsilon \in \{-1, 1\} \\ 1 \leq i \leq n}} B_f(\varepsilon e_i, 1) \right\}$$

13. Matrices de rang 1 (1). _____ ✎ ✕

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire défini à l'exercice 6, et on note $\Gamma = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \operatorname{rg}(A) = 1\}$.

- (1) Déterminer $\inf_{A \in \Gamma} \|I_n - A\|$.
- (2) Pour quelles $A \in \Gamma$ est-ce que la borne inférieure précédente est atteinte?

14. Bases raisonnablement proches. _____ ✎ 🌀

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E . Montrer que toute famille de vecteurs $(f_1, \dots, f_n) \in E^n$ qui vérifie $\|f_k - e_k\| < \frac{1}{\sqrt{n}}$ pour tout $1 \leq k \leq n$ est libre. Le résultat subsiste-t-il si l'inégalité précédente est supposée large?

15. Distance à X^3 . _____ ✎ 🎓

Calculer $\inf_{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3} \int_{-1}^1 (t^3 - at^2 - bt - c)^2 dt$.

16. Étude des endomorphismes adjoints. _____ ✎ 🎓

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On nomme l'adjoint de f l'unique endomorphisme noté f^* tel que $\langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle$ pour tout $(x, y) \in E^2$.

- (1) Montrer que f^* existe et est bien unique.
- (2) Déterminer f^* pour $f : x \mapsto \langle b, x \rangle a - \langle a, x \rangle b$ avec $(a, b) \in E^2$.
- (3) Dans le cas général, déterminer $\ker(f^*)$ et $\operatorname{Im}(f^*)$ via f . En déduire que $\operatorname{rg}(f^*) = \operatorname{rg}(f)$.
- (4) On pose $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ deux polynômes premiers entre eux. Montrer que $\ker(P(f)) \perp \ker(Q(f^*))$.

17. Adjoint d'une contraction. _____

On reprend la définition de l'adjoint introduite dans l'exercice précédent. On pose alors $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\|f(x)\| \leq \|x\|$ pour tout $x \in E$.

- (1) Montrer que f^* vérifie la même propriété.
- (2) Montrer que $f - id_E$ et $f^* - id_E$ ont même noyau.
- (3) Montrer que $E = \ker(f - id_E) \oplus^\perp \operatorname{Im}(f - id_E)$.
- (4) Calculer, pour tout $x \in E$:

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} f^k(x)$$

18. Intégrale de f et $1/f$ unitaire. _____

Déterminer les fonctions $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}_+^*)$ telles que $\int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 \frac{dt}{f(t)} = 1$.

19. Principe de maximum polynomiale (2). _____

On fixe $n \geq 1$, $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on pose $H_k = \frac{(X - \alpha)^k}{k!}$

- (1) Montrer que:

$$\langle \cdot | \cdot \rangle : \begin{cases} E \rightarrow \mathbb{R} \\ (P, Q) \mapsto \sum_{k=0}^n P^{(k)}(\alpha) Q^{(k)}(\alpha) \end{cases}$$

Est un produit scalaire, et montrer que la famille $(H_0, H_1, \dots, H_n)$ forme une base orthonormée de E pour ce produit scalaire.

- (2) Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$, $Q \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geq 1$. Montrer que pour tout $0 \leq k \leq n$:

$$Q^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{Q(z_0 + re^{i\theta})}{r^k e^{ik\theta}} d\theta$$

- (3) En déduire une nouvelle démonstration du principe du maximum:

$$\|Q\|_{\infty, \mathbb{D}(0,1)} \leq \|Q\|_{\infty, \mathbb{U}}$$

20. Théorème de Cartan-Dieudonné. _____

On note $\mathcal{O}(E)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de E et on fixe $f \in \mathcal{O}(E)$. On appelle *réflexion* toute symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan.

- (1) On munit E de son produit scalaire canonique $\langle \cdot | \cdot \rangle$. Montrer que pour tout $(x, y) \in E^2$, $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$. Interpréter ceci géométriquement.
- (2) Soient $(u, v) \in E^2$ de même norme. Montrer qu'il existe une réflexion s telle que $s(u) = v$.
- (3) Soit F un sous espace vectoriel de E stable par f . Montrer que $F^\perp$ est stable par l'adjoint f^* .
- (4) En déduire le théorème de Cartan-Dieudonné: tout endomorphisme orthogonal d'un espace Euclidien E est produit d'au plus n réflexions.

21. Déterminant de Gram et distance à une partie.



Ici, E est un $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension d . On considère le déterminant suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, G(x_1, \dots, x_n) := \begin{vmatrix} \langle x_1 | x_1 \rangle & \langle x_1 | x_2 \rangle & \dots & \langle x_1 | x_n \rangle \\ \langle x_2 | x_1 \rangle & \langle x_2 | x_2 \rangle & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \langle x_{n-1} | x_n \rangle \\ \langle x_n | x_1 \rangle & \dots & \langle x_n | x_{n-1} \rangle & \langle x_n | x_n \rangle \end{vmatrix}$$

$G(x_1, \dots, x_n)$ est appelé déterminant de Gram de la famille $(x_1, \dots, x_n)$, c'est à dire le déterminant de la matrice de Gram associée à la famille $(x_1, \dots, x_n)$ d'expression $M_g(x_1, \dots, x_n) = (\langle x_i | x_j \rangle)_{(i,j) \in \mathbb{N}_n}$.

- (1) Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$. Montrer que la famille $(x_1, \dots, x_n)$ et sa matrice de Gram ont même rang. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que cette dernière soit inversible.
- (2) Démontrer ces quelques propriétés élémentaires sur G :
 - $\forall a \in \mathbb{K}, \forall i \in \mathbb{N}_n, G(x_1, \dots, x_{i-1}, ax_i, x_{i+1}, \dots, x_n) = a^2 G(x_1, \dots, x_n)$
 - $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n, G(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = G(x_1, \dots, x_n)$
 - $\forall i \in \mathbb{N}_n, \forall x \in \text{vect}(\{x_1, \dots, x_n\} \setminus \{x_i\}), G(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + x, x_{i+1}, \dots, x_n) = G(x_1, \dots, x_n)$
- (3) Montrer que $G(x_1, \dots, x_n) \geq 0$ pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$.
- (4) On pose $\|\cdot\| : x \mapsto \sqrt{\langle x | x \rangle}$. Justifier cette définition et montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur E .
- (5) Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$. On suppose qu'il existe $i \in \mathbb{N}_n$ tel que x_i soit orthogonal à x_j pour tout $j \in \mathbb{N}_n \setminus \{i\}$ au sens de $\langle \cdot | \cdot \rangle$, c'est à dire que $\langle x_i | x_j \rangle = 0$ pour tout $j \in \mathbb{N}_n \setminus \{i\}$. Montrer que l'on a alors :

$$G(x_1, \dots, x_n) = \|x_i\|^2 G(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

- (6) Soient F un s.e.v. strict de E et $x \in E$. Montrer qu'il existe une unique $y \in F$ tel que $x - y$ est orthogonal à tout élément de F au sens de $\langle \cdot | \cdot \rangle$ et vérifiant $y \in F$.
- (7) On pose $\dim(F) = s$ et $(f_1, \dots, f_s)$ une base de F . Montrer que l'on a :

$$\|x - y\| = \sqrt{\frac{G(x, f_1, \dots, f_s)}{G(f_1, \dots, f_s)}}$$

- (8) On prend ici $x \in F$ et on pose $x = \sum_{i=1}^s p_i f_i$. Montrer que l'on a :

$$\forall j \in \mathbb{N}_s, |p_j| = \sqrt{\frac{G(f_1, \dots, f_{j-1}, x, f_{j+1}, \dots, f_s)}{G(f_1, \dots, f_s)}}$$

Remarque : Ces deux derniers résultats sont fondamentaux dans l'étude du déterminant de Gram car ils permettent d'évaluer la distance entre un élément $x \in E$ et un s.e.v. F de E (cette distance est représentée par $\|x - y\|$ ou $|p_j|$ dans le cas particulier de la dernière question).

- (9) Soient $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$. On munit $\mathbb{C}^n$ du produit scalaire canonique, i.e. de $\langle \cdot | \cdot \rangle : (x, y) \mapsto \bar{x}^t \cdot y$. On pose alors $\|\cdot\|$ la norme associée. Montrer que $|\det(z_1, \dots, z_n)| \leq \|z_1\| \times \dots \times \|z_n\|$.



"You offer me an opportunity which I eagerly seize to remind you of me while thanking you for the first volume of your treatise on analysis that you have bestowed on me the honor of sending to me." - Charles Hermite to Rudolf Otto Sigismund Lipschitz

17. Primitives et équations différentielles

1. Résolutions classiques. _____ ✓ ✎ 🎓

Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$:

(1) $y' + 2y = -4$

(2) $2y' - 3y = 9$

(3) $y' + 4y = x^2 - 2x + 3$

(4) $7y' + 2y = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1$

(5) $y' + y = xe^{-x}$

(6) $y' - 2y = \cos(2x) + 2\sin(x)$

2. Second membre simple. _____ ✎ 🎓

Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$:

(1) $y' + x^2y = -x^2$

(2) $2xy' - y = x$

(3) $y' - \frac{x}{1+x^2}y = \frac{1}{1+x^2}$

3. Modèle de Verhulst. _____ 💡 ✎

Soit $(r, k) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Déterminer les solutions au modèle de croissance exponentielle, proposé par le mathématicien belge Pierre-François Verhulst :

$$y' = ry \left(1 - \frac{y}{k}\right)$$

4. Déterminant différentiel. _____

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) : $\begin{vmatrix} y'' & y' & y \\ y & y'' & y' \\ y' & y & y'' \end{vmatrix} = 0$

5. L'équation de la MPSI3. _____ *

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ tel que $f'' + f \geq 0$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) + f(x + \pi) \geq 0$

6. Lemme de Grönwall. _____

- (1) Soit $a < b$, f, g deux fonctions continues avec g positive, sur l'intervalle $[a, b]$ telles qu'il existe un $C \geq 0$ pour que tout $t \in [a, b]$:

$$f(t) \leq C + \int_a^t g(s)f(s) \, ds$$

Montrer que pour tout $t \in [a, b]$, $f(t) \leq C \exp\left(\int_a^t g(s) \, ds\right)$

- (2) Soient $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, κ -Lipschitzienne, $f, g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ deux solutions de l'équation non linéaire $y' = H(y)$. Montrer que pour tout $x \geq 0$, $|f(x) - g(x)| \leq e^{\kappa x} |f(0) - g(0)|$. En déduire l'unicité des solutions au problème de Cauchy:

$$\begin{cases} y' = H(y) \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

7. $f' + f = o(1)$. _____

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ tel que $f'(x) + f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$. Montrer que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$.

8. Équations à retard. _____

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

- (1) Déterminer les solutions à l'équation différentielle $f'(x) + f(-x) = e^x$.
 (2) Déterminer les solutions à l'équation différentielle $f'(x) = f(\lambda - x)$.

- (3) Déterminer les solutions à l'équation différentielle $f(x) + 1 = \int_0^{\pi-x} f(t) dt$

9. Solutions bornées (1). _____

Déterminer les valeurs $\kappa \in \mathbb{R}$ tel que les solutions de $f'' + \kappa f' + f = 0$ soient bornées. Il est attendu de traiter les différents cas relatifs au domaine de définition.

10. Solutions bornées (2). _____

Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue, 2π -périodique.

- (1) Montrer que l'équation différentielle $y - y' = g$ admet un unique solution bornée sur $\mathbb{R}$ qu'on notera f
- (2) Étudier la périodicité de f .

11. Initiation au Wronskien. _____ *

Soient $(a, b) \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On va étudier en détail l'équation:

$$(E) : y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$$

- (1) En posant $y = \tilde{y}z$, montrer que l'on peut toujours se ramener à une équation équivalente à (E) de la forme:

$$(E') : y'' + q(t)y = 0$$

Avec $q \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

- (2) On note $\mathcal{S}_{E'}$ les solutions de l'équation (E') . Montrer que:

$$\phi : \begin{cases} \mathcal{S}_{E'} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ y \mapsto (y(0), y'(0)) \end{cases}$$

Est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En déduire que $\mathcal{S}_{E'}$ est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension 2, dont on notera par la suite (u, v) une base.

- (3) On introduit le Wronskien: $W(u, v) = \begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix}$. Trouver une équation différentielle satisfaite par W et en déduire qu'il est de signe constant sur $\mathbb{R}$.
- (4) *Théorème de Sturm*: On suppose qu'il existe $a < b$ tel que $u(a) = u(b) = 0$. Montrer que v s'annule sur l'intervalle $]a, b[$.

12. Quelques primitives. _____ ✓

Primitiver les fonctions suivantes:

$$\begin{array}{lll}
(1) \ x \mapsto \arctan(x) & (3) \ x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sin(x)^2 + 2 \tan(x)^2} & (5) \ x \mapsto x \mapsto \frac{1}{1+e^x} \\
(2) \ x \mapsto \arctan\left(\frac{1}{x}\right) & (4) \ x \mapsto \frac{1}{1+\cos(x)} & (6) \ x \mapsto \frac{1}{x^4 - x^2 - 2}
\end{array}$$

13. Technique du roi. 💡🎓

Soit $n \geq 0$, $a, R > 0$. Calculer les intégrales suivantes:

$$\begin{array}{lll}
(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \tan^\pi(\theta)} d\theta. & (2) \int_{-R}^R \frac{1}{1 + a^x} dx. & (3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\theta)^n}{\cos(\theta)^n + \sin(\theta)^n} d\theta.
\end{array}$$

14. Application du lemme des noyaux. 🔗🎓💎

Soit $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ avec $a_n \neq 0$ et on note $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On considère l'équation différentielle linéaire suivant sur $\mathbb{R}$:

$$(E) : a_0 y + a_1 y' + \dots + a_n y^{(n)} = 0$$

On note $\mathcal{D} : E \rightarrow E$ l'application qui à $f \mapsto f'$.

(1) Montrer que $\mathcal{D}$ est un endomorphisme du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E .

(2) On note $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$. P se factorise dans $\mathbb{C}$. On note $Z_{\mathbb{C}}(P)$ l'ensemble de ses racines complexes et pour tout $\lambda \in Z_{\mathbb{C}}(P)$, on note $\mu(\lambda)$ sa multiplicité. On a alors:

$$P(X) = \prod_{\lambda \in Z_{\mathbb{C}}(P)} (X - \lambda)^{\mu(\lambda)}$$

En utilisant le lemme des noyaux (exercice 15 P.121), montrer que l'ensemble des solutions à l'équation différentielle (E) , noté $\mathcal{S}_E$, est exactement:

$$\mathcal{S}_E = \bigoplus_{\lambda \in Z_{\mathbb{C}}(P)} \ker((\mathcal{D} - \lambda \text{Id}_E)^{\mu(\lambda)})$$

(3) En déduire exactement $\mathcal{S}_E$.

15. Problème inverse. 🔗

Déterminer une équation différentielles dont les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions suivantes :

$$x \mapsto \frac{C + x}{1 + x^2}, \quad C \in \mathbb{R}$$

16. Membre de gauche dépendant. _____ ✎

(1) Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telles que $f' + f = f(0) + f(1)$.

(2) Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telles que $f' + f = \int_0^1 f(x)dx$.

17. Un système cas classique. _____ 🎓 ✎

On considère le système différentiel régissant la trajectoire d'un point $M = (x, y, z)$ dans $\mathbb{R}^3$ suivant :

$$\begin{cases} x'' = \omega y' \\ y'' = -\omega x' \\ z'' = 0 \end{cases}$$

On pose $u = x' + iy'$. Résoudre le système.

Remarque : ce système se retrouve très souvent en physique. Le point M pourrait par exemple être la position d'une particule dans un champ magnétique suivant l'axe porté par z . Le paramètre ω dépendrait alors de la masse et de la charge de cette particule.

18. Une identité reconnaissable (1). _____ ✓

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable vérifiant : $\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2, f(s+t) = f(s)f(t)$. Que dire de f ?

19. Une identité reconnaissable (2). _____ ✎

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivables telles que :

$$\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2, f(s+t) + f(s-t) = 2f(s)f(t)$$

20. Équation différentielle typique. _____ ✎

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle suivante : $xy' + y = \arctan(x)$.



“La physique est l’étude des lois que dieu nous impose. Les mathématiques, c’est l’étude des lois que même dieu doit suivre.”- J.P. Serre

18. Analyse asymptotique

1. Quelques développements. _____ ✓

Déterminer des développements limités à l’ordre indiqué des fonctions suivantes:

- | | |
|---|---|
| (1) $DL_3(0)$ de $x \mapsto e^x \sqrt[3]{1+x}$ | (10) $DL_3(0)$ de $x \mapsto (\cos x)^{1/x}$ |
| (2) $DL_3(0)$ de $x \mapsto \sin(x) \ln(1+x)$ | (11) $DL_{100}(2)$ de $x \mapsto x^4$ |
| (3) $DL_3(0)$ de $x \mapsto \sqrt{1+\sin x}$ | (12) $DL_2(1)$ de $x \mapsto \sqrt{x}$ |
| (4) $DL_3(0)$ de $x \mapsto (e^x - 1) \sin x$ | (13) $DL_2(1)$ de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ |
| (5) $DL_2(0)$ de $x \mapsto \frac{x}{e^x - 1}$ | (14) $DL_3(1)$ de $\exp$ |
| (6) $DL_2(0)$ de $x \mapsto e^{\cos x} - (1+x)^{\frac{1}{x}}$ | (15) $DL_2\left(\frac{\pi}{3}\right)$ de $x \mapsto \sin(x) \cos(3x)$ |
| (7) $DL_8(0)$ de $x \mapsto (\sin x)^4$ | (16) $DL_3\left(\frac{\pi}{4}\right)$ de $x \mapsto \sqrt{\tan x}$ |
| (8) $DL_6(0)$ de $x \mapsto \tan x$ | (17) $DL_3(1)$ de $x \mapsto \frac{x \ln x}{x^2 - 1}$ |
| (9) $DL_4(0)$ de $x \mapsto \frac{xe^{-x}}{2x+1}$ | |

2. Un peu plus exotique. _____ 💡

- (1) On pose $(u_n) = (1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, \dots)$. Déterminer un équivalent de (u_n) au voisinage de l’infini.
- (2) On note pour tout $n \geq 1$ $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, et pour tout $x \geq 1$: $\alpha(x) = \#\{n \geq 1, H_n \leq x\}$.
Déterminer un équivalent de $\alpha(x)$ lorsque $x \rightarrow \infty$.
- (3) Développement asymptotique à 3 termes de $x \mapsto \arctan(x)$.

3. $u_n = o(1/n)$. _____ ✓

Soit (u_n) une suite réelle vérifiant $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$. Montrer que $\sum_{k=n+1}^{2n} u_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Est-ce que la suite $\left(\sum_{k=0}^n u_k\right)_{n \geq 0}$ converge?

4. $\sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$. _____ ✎

Déterminer un développement limité au voisinage de l'infini de la suite $\left(\sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)\right)_{n \geq 1}$ à la précision de $o\left(\frac{1}{n}\right)$

5. Une équation diophantienne. _____ ✎

(1) Déterminer un développement asymptotique à l'ordre de $o(1/x)$ de la fonction $x \mapsto \sqrt{x^4 + x^3 + 1}$.

(2) En déduire que l'ensemble $\{(a, b) \in \mathbb{Z}^2, a^2 = b^4 + b^3 + 1\}$ est fini.

6. Méthode des petit pas (1). _____ ✎ * 🎓 ✎

On fixe $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$. Déterminer un équivalent de (u_n) au voisinage de l'infini.

7. Méthode des petit pas (2). _____ * ✎

Soit $u_0 \geq 0$. On pose pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$. Déterminer un équivalent au voisinage de l'infini de (u_n) , puis un développement à deux termes.

8. Une suite récursive. _____ ✎

On pose $u_0 = 0$ et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + n^2}$

(1) Montrer que $u_n = n + \mathcal{O}(1)$.

(2) En déduire que $u_n = n - \frac{1}{2} + o(1)$

(3) Pousser le développement asymptotique précédent jusqu'à $o\left(\frac{1}{n}\right)$

9. Méthode des petit pas (3). _____ ✱

On pose $u_0 > 0$ et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$. Déterminer un équivalent de (u_n) .

10. Développement limité de f^{-1} . _____

On pose $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto xe^{x^2}$.

(1) Montrer que f réalise une bijection.

(2) Trouver un développement limité à l'ordre 5 au voisinage de 0 de f , puis de $g = f^{-1}$.

11. Méthode des petit pas (4). _____ ✱

On pose $u_0 > 1$ et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{\ln(u_n)}$. Déterminer un équivalent de (u_n) au voisinage de l'infini.

12. Un équivalent simple. _____ ✓

Déterminer un équivalent simple de la suite $\left(\sum_{k=0}^n k! \right)_{n \geq 0}$.

13. Un exercice exotique. _____ ✱ ENS

Soit $a_0 > 1$, et on définit pour $n \geq 1$ par récursivité les termes suivants par la relation:

$$a_n S_n = 1 \text{ avec } S_n = \sum_{k=0}^n a_k$$

Trouver un équivalent de (a_n) au voisinage de l'infini.

14. Points entiers dans le cercle de rayon r . _____ ✱

Pour tout $r \geq 0$, on note $Q(r) = \{(m, n) \in \mathbb{Z}^2, m^2 + n^2 \leq r^2\}$.

(1) Déterminer un équivalent au voisinage de l'infini de $Q(r)$.

(2) (*Difficile*) En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss: $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$.

15. Déterminer le DL de $\tan$. _____ 

On considère sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E) : y' = y^2 + 1$. Montrer que $\tan$ est solution de E et en déduire une façon de déterminer le $DL_n(0)$ de $\tan$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

16. Une quasi-identité. _____ 

Déterminer le $DL_{12}(0)$ de $x \mapsto \ln \left(\sum_{k=0}^{11} \frac{x^k}{k!} \right)$.

17. Un théorème d'équivalents classique. _____ ✓

Soit $(u_n), (v_n)$ deux suites strictement positives équivalentes au voisinage de l'infini ne tendant pas vers 0. Montrer que les suites $(\ln(u_n))$ et $(\ln(v_n))$ sont équivalentes au voisinage de l'infini.

18. Relations logiques. _____ 

Soit $((u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}}) \in (\mathbb{R}^{\mathbb{N}})^2$ avec $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite non nulle. Y-a-t-il une relation logique entre les deux assertions suivantes : $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ et $u_n = v_n + o_{+\infty}(1)$. Justifier.

19. Points entiers de $x + \ln(x)$. _____ ✓

(1) Montrer que $x + \ln(x) = n$ admet une unique solution strictement positive pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(2) On note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de ces solutions. Montrer que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$.

(3) Montrer que $u_n = n - \ln(n) + o_{n \rightarrow +\infty}(1)$.

20. Solutions à l'équation $\tan(x) = x$. _____   

Pour tout $n \geq 0$, on note x_n l'unique solution sur l'intervalle $I_n = \left] -\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi \right[$ à l'équation $\tan(x_n) = x_n$. Déterminer un développement limité à l'ordre 3 de (x_n) .



Guido Fubini

19. Séries et familles sommables

1. Lemme de Dirichlet. _____ ✍️ 🎓 💎

Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $N \geq 1$.

- (1) Montrer qu'il existe $0 \leq i < j \leq N$ tels que $|\{\alpha i\} - \{\alpha j\}| \leq \frac{1}{N}$, avec $\{x\}$ la partie décimale de $x \in \mathbb{R}$.
- (2) En déduire le lemme de Dirichlet: pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, il existe une infinité de rationnels de la forme p/q avec $p \wedge q = 1$ vérifiant:

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q^2}$$

- (3) On admet que π est un nombre irrationnel. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 \sin(n)^2}$

2. Des contre exemples. _____ ✓ ✍️ 💡

- (1) Trouver deux suites $(a_n), (b_n)$ tels que $a_n \sim b_n$ au voisinage de l'infini et que $\sum_{n \geq 0} a_n$ converge et $\sum_{n \geq 0} b_n$ diverge.
- (2) Trouver une suite (c_n) tel que $\sum_{n \geq 0} c_n$ converge mais la suite $(n^\alpha c_n)$ n'est bornée pour aucun $\alpha > 0$.
- (3) Soit (d_n) une suite de réels décroissante tel que $\sum_{n \geq 0} d_n$ converge. Montrer que $d_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$

3. Critère de Raabe-Duhamel.



- (1) Soit $(a_n) \in (\mathbb{R}^*)^{\mathbb{N}}$ tel qu'il existe un $\lambda > 0$ vérifiant:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

Montrer l'existence d'un $C > 0$ tel que $a_n \sim Cn^\lambda$.

- (2) Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tel qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{n+a}{n+b}$$

Pour quelles valeurs $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ la série de terme générale (u_n) converge-t-elle?

- (3) Soit $x, y > 0$, et on pose:

$$u_n = \frac{x(1+x)(2+x)\dots(n+x)}{y(1+y)\dots(n+y)}$$

Montrer que la série de terme générale (u_n) converge lorsque $y > x + 1$ et est divergente si $y \leq x + 1$.

4. Critère d'Abel.



- (1) Soit $(a_n), (b_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ deux suites, et notons:

$$A_n = \sum_{k=0}^n a_k \quad B_n = \sum_{k=0}^n b_k$$

Montrer la transformation d'Abel:

$$\sum_{k=0}^n a_k b_k = a_n B_n + \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k$$

- (2) En déduire le critère d'Abel: si (a_n) est décroissante et tend vers 0 et B_n est bornée, alors on a que:

$$\sum_{k=0}^n a_k b_k \text{ converge}$$

- (3) Montrer alors le critère de Leibniz, et déterminer les valeurs $\theta \in [0, 2\pi[$ pour lesquels la série $S(\theta)$ est convergente:

$$S(\theta) = \sum_{n \geq 1} \frac{\sin(n\theta)}{n}$$

5. Quelques séries (1).



Soit avec $f \in \mathcal{C}^2([0, 1])$. Déterminer la nature des séries suivantes:

(1) $\sum_{n \geq 1} f\left(\frac{1}{n}\right)$

(2) $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(\ln(n))}{n}$

(3) $\sum_{n \geq 1} \frac{|\cos(n)|}{n}$

6. La série de terme générale $|\cos(n)|^n$. _____

La série de terme générale $(|\cos(n)|^n)$ converge-t-elle?

7. Une symétrie surprenante. _____

Soient $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$ et $(a, b, c) \in (\mathbb{N}^*)^3$. Montrer : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{cn}}{1 - z^{an+b}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{bn}}{1 - z^{an+c}}$.

8. Somme des inverses des quasi-carrés. _____

Prouver l'existence et déterminer la valeur de $\sum_{(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}$.

9. Power trick. _____

Soit $(u_n) \in \ell^1(\mathbb{N}) \cap \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$, $0 < p < q$ tel que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n^p \leq 1 \text{ et } \sum_{n=0}^{\infty} u_n^q \leq 1$$

Montrer que pour tout $r \in]p, q[$, $\sum_{n=0}^{\infty} u_n^r \leq 1$

10. Familles indénombrables. _____

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ continue et non identiquement nulle. Montrer que $\sum_{i \in I} f(i) = +\infty$

11. Critère de d'Alembert (2). _____

(1) Soit $(u_n) \in (\mathbb{C}^*)^{\mathbb{N}}$. On suppose qu'il existe $\ell \geq 0$ vérifiant $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \ell$. Montrer que $(u_n) \in \ell(\mathbb{N})$ lorsque $\ell < 1$, que la série de terme générale diverge grossièrement pour $\ell > 1$ et que le cas $\ell = 1$ ne permet pas de conclure en donnant des contre exemples.

(2) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, $x \in \mathbb{C}$. Déterminer la nature des séries suivantes :

(a) $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$

(b) $\sum_{n \geq 0} \frac{P(n)}{2^n}$

(c) $\sum_{n \geq 0} \frac{n^\alpha (\ln(n))^n}{n!}$

12. Quelques séries (2). _____

Déterminer la nature des séries suivantes

$$(1) \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{\lfloor \ln(n) \rfloor}}{n}$$

$$(2) \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{\sin(\ln(n))}{n}$$

$$(3) \sum_{n \geq 0} \sin((1 + \sqrt{2})^n \pi)$$

13. Initiation à la fonction ζ de Riemann. _____

Pour tout $s > 1$ on pose $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$.

(1) Montrer que $\zeta(s)$ est bien défini pour $s > 1$.

(2) Montrer que la fonction $s \mapsto \zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ est bornée au voisinage de 1.

(3) Montrer la convergence, puis calculer les séries suivantes:

$$\sum_{n \geq 2} \frac{\zeta(n) - 1}{n} \text{ et } \sum_{k \geq 2} \zeta(k) - 1$$

14. Un calcul de série. _____

Calculer $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln(n)}{n}$.

15. Un oral des mines. _____

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = -\infty$$

Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} f(n)$ converge et donner un équivalent lorsque $n \rightarrow \infty$ de $R_n = \sum_{k=n}^{\infty} f(k)$

16. Série convergente d'une série divergente. _____

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série à termes strictement positifs divergente. Pour tout $n \geq 0$ on note $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

Discuter en fonction du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$ la nature de la série:

$$\sum_{n \geq 0} \frac{u_n}{S_n^\alpha}$$

17. Séries de Dirichlet. ✎ * 🎓

Pour tout $(a_n) \in \mathcal{C}^{\mathbb{N}}$, on appelle série de Dirichlet associée à (a_n) l'expression:

$$\mathcal{D}((a_n))(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

Lorsque cela a bien un sens. Il est alors évident que $\mathcal{D}((1))(s) = \zeta(s)$ par exemple. On se propose ici de montrer quelques résultats basiques à propos des série de Dirichlet.

- (1) Soient $(a_n), (b_n)$ deux suites à valeurs complexes tels que leurs séries de Dirichlet convergent pour tout $s > 1$. Montrer que:

$$\mathcal{D}((a_n))(s)\mathcal{D}((b_n))(s) = \mathcal{D}((c_n))(s) \text{ avec } \forall n \in \mathbb{N}, c_n = (a * b)_n = \sum_{d|n} a_d b_{n/d}$$

- (2) En déduire la convergence et valeur de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^s}$ pour tout $s > 1$ avec $d(n)$ le nombre de diviseurs de n .

- (3) On note μ la fonction de Möbius introduit à l'exercice 19 chapitre 2. Montrer que, pour tout $s > 1$:

$$1 = \mathcal{D}((\mu(n)))(s)\zeta(s)$$

- (4) En déduire que pour tout $s > 1$, $\zeta(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(\frac{1}{1 - p^{-s}} \right)$

18. Quelques séries (3). *

- (1) Soit $\gamma : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ Une bijection. Quelle est la nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n\gamma(n)}$?

- (2) On note $d(n)$ le nombre de diviseurs de n et ϕ l'indicatrice d'Euler. Déterminer la nature des séries suivantes et calculer leur valeur dans le cas de convergence:

$$(3) \sum_{n \geq 1} \frac{d(n)}{2^n} \qquad (4) \sum_{n \geq 1} \frac{\varphi(n)}{2^n - 1} \qquad (5) \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

19. Théorème de Riemann. _____

Soit $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite telle que la série associée est semi convergente, c'est à dire que $(a_n) \notin \ell^1(\mathbb{N})$ mais que $\sum_{n \geq 0} a_n$ est convergente. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, il existe $\gamma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une bijection telle que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{\gamma(n)} = \alpha$$

20. Critère de Condensation de Cauchy et séries de Bertrand. _____

Soit (a_n) une suite réelle décroissante tendant vers 0.

(1) Montrer que les séries $\sum_{n \geq 0} a_n$ et $\sum_{n \geq 0} 2^n a_{2^n}$ sont de même nature.

(2) En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ en fonction des paramètres $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$



Upon hearing that one of his students had dropped out to study poetry : “Good, he did not have enough imagination to become a mathematician” - David Hilbert

20. Fractions rationnelles, arithmétique des polynômes

1. Irréductibilité dans $\mathbb{Q}[X]$. _____ ✓

- (1) Montrer que le polynôme $X^3 + X + 1$ est irréductible sur $\mathbb{Q}[X]$.
- (2) Exhiber un polynôme de degré 4 qui est réductible sur $\mathbb{Q}[X]$ mais n'a pas de racines dans $\mathbb{R}$.

2. Un lemme utile (1). _____ ✓

Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$, $P(0) \neq 0$, $P(X) = a_n X^n - \sum_{k=0}^n a_k X^k$. On suppose que $Z_{\mathbb{Q}}(P) \neq \emptyset$. Soit $p/q \in Z_{\mathbb{Q}}(P)$, avec $p \wedge q = 1$. Montrer que $p|a_0$ et que $q|a_n$.

3. Lemme de Gauss sur les contenus. _____

Pour tout $P \in \mathbb{Z}[X]$, $P(X) = \sum_{i=0}^n a_i X^i$, on note $C(P) = \bigwedge_{i=0}^n a_i$.

- (1) *Lemme de Gauss*: Montrer que si $(P, Q) \in \mathbb{Z}[X]^2$, on a $C(PQ) = C(P)C(Q)$.
- (2) En déduire que si $P \in \mathbb{Z}[X]$ et que $P = AB$ avec $(A, B) \in \mathbb{Q}[X]^2$ alors il existe $(\tilde{A}, \tilde{B}) \in \mathbb{Z}[X]^2$ tel que $P = \tilde{A}\tilde{B}$.
- (3) Montrer que si $(A, B) \in \mathbb{Q}[X]$ sont unitaires et vérifient $AB \in \mathbb{Z}[X]$, alors $(A, B) \in \mathbb{Z}[X]^2$.

4. Critère d'Eisenstein.



Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$. On note $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ et on suppose qu'il existe un $p \in \mathcal{P}$ vérifiant:

- Pour tout $0 \leq i \leq n-1$, $p|a_i$ mais $p \nmid a_n$
- $p^2 \nmid a_0$

Montrer que P est irréductible sur $\mathbb{Q}[X]$.

5. Division euclidienne de polynômes.



- (1) Soient $a \in \mathbb{R}$ et $P = \prod_{k=1}^n (X \sin(ka) + \cos(ka))$.

Calculer le reste de la division euclidienne de P par $X^2 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

- (2) Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ pour que $A = X^3 + pX + q$ admette un zéro multiple.

6. Initiation aux polynômes cyclotomiques.



Pour tout $n \geq 1$, on note $\zeta_n = \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right)$, et on pose:

$$\Phi_n = \prod_{k \wedge n = 1} (X - \zeta_n^k)$$

- (1) Déterminer Φ_p pour p premier.
- (2) Montrer que $X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(X)$. En déduire que $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$ pour tout $n \geq 1$.
- (3) On va montrer que Φ_n est toujours irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$. On note ζ une racine primitive de $\mathbb{U}_n$ et pour tout α algébrique sur $\mathbb{Q}$, $\Pi_{\mathbb{Q}, \alpha}$ son polynôme minimal. Montrer que Φ_n est irréductible sur $\mathbb{Q}[X]$ si et seulement si pour tout p premier avec n nombre premier, $\Pi_{\mathbb{Q}, \zeta^p} = \Pi_{\mathbb{Q}, \zeta}$.
- (4) On raisonne par l'absurde en supposant que $\Pi_{\mathbb{Q}, \zeta} \neq \Pi_{\mathbb{Q}, \zeta^p}$ pour un certain p premier, premier avec n . Montrer qu'il existe alors un polynôme $S \in \mathbb{F}_p[X]$ tel que $S^2 | \overline{\Phi}_n$ dans $\mathbb{F}_p[X]$.
- (5) Conclure.
- (6) Trouver les $r \in \mathbb{Q}$ tels que $\cos(\pi r) \in \mathbb{Q}$, puis les $r \in \mathbb{Q}$ tels que $\cos(\pi r)$ soit irrationnel quaratique.

7. Une famille de polynômes irréductibles.



Soit $n \geq 2$, $p \in \mathcal{P}$. Montrer que $P = X^n + pX + p^2$ est irréductible sur $\mathbb{Q}[X]$.

8. Décompositions en éléments simples (1). _____

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(0) \neq 0$. Calculer les sommes suivantes:

$$(1) \sum_{\lambda \in Z_c(P)} \frac{1}{\lambda}$$

$$(2) \sum_{\lambda \in Z_c(P)} \frac{1}{\lambda^2}$$

$$(3) \sum_{\lambda \in Z_c(P)} \frac{1}{P'(\lambda)\lambda}$$

9. Décomposition en éléments simples (2). _____ ✓

Déterminer la décomposition en éléments simples des fractions rationnelles suivantes:

$$(1) \frac{1}{X(X-1)\dots(X-n)}$$

$$(2) \frac{1}{X^n - 1}$$

$$(3) \frac{1}{T_n}$$

Avec T_n le n -ième polynôme de Tchebychev (exercice 3 chapitre 3).

10. Polynômes scindés dans $\mathbb{R}$. _____

- (1) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé à racines simples dans $\mathbb{R}$. Montrer que P' est également scindé à racines simples dans $\mathbb{R}$.
- (2) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé à racines dans $\mathbb{R}$. Montrer que P' est également scindé à racines dans $\mathbb{R}$.

11. Gauss-Lucas (1). _____

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, Δ une droite du plan complexe qui sépare ce dernier en deux demi plans ouverts H_1 et H_2 . Montrer que si P' admet une racine dans H_1 , alors $P(H_1) = \mathbb{C}$.

12. Gauss-Lucas (2). _____

Déterminer le plus grand entier $n \geq 2$ tel que les racines non nuls de $(X+1)^n - X^n - 1$ soient de module 1.

13. Éléments de $\text{GL}_n(\mathbb{Q})$ d'ordre fini. _____ * *

L'exercice suivant est pour le pur plaisir et pas réellement accessible avec les outils de sup. Attaquez le avec courage!

On fixe $n \geq 1$.

- (1) Soit $m \geq 1$. Montrer qu'il existe un $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})$ d'ordre m si et seulement si il existe $s \geq 1$, $(d_1, \dots, d_s) \in (\mathbb{N}^*)^s$ tel que $m = d_1 \vee \dots \vee d_s$ et $\sum_{i=1}^s \varphi(d_i) = n$.
- (2) Soient $r \geq 1$, $(p_1, \dots, p_r) \in \mathcal{P}^r$, $m = \prod_{i=1}^r p_i$. Montrer qu'il existe $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})$ d'ordre m si et seulement si $\sum_{i=1}^r p_i - r \leq n$.
- (3) On fait varier n : pour tout $n \geq 1$, on note $f(n)$ l'ordre maximale d'un élément de $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})$. Montrer que:

$$\ln(f(n)) \sim \sqrt{n \ln(n)}$$

14. Racines multiples de P' . ENS

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer que toute racine multiple de P' est racine de P .

15. Lemme des noyaux.

On souhaite montrer le lemme des noyaux: Soit E un espace vectoriel de dimension finie n , $P_1, \dots, P_\ell \in \mathbb{R}[X]$ deux à deux premiers entre eux, $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors:

$$\ker \left(\prod_{i=1}^{\ell} P_i(f) \right) = \bigoplus_{i=1}^{\ell} \ker(P_i(f))$$

- (1) Montrer que si le résultat est vrai pour deux polynômes $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]$ premiers entre eux, alors le résultat se généralise facilement par récurrence.
- (2) On se concentre alors sur le cas $\ell = 2$. Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$ avec $P \wedge Q = 1$. Montrer d'abord que $\ker(P(f)) \cap \ker(Q(f)) = 0$.
- (3) En déduire que $\ker((PQ)(f)) = \ker(P(f)) + \ker(Q(f))$.
- (4) Conclure.
- (5) *Application:* Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que son polynôme minimal soit simplement scindé. Montrer que f est diagonal dans une base que l'on déterminera.

16. Un bon contre exemple.

Soit p un nombre premier.

- (1) Montrer que $\{x^2, x \in \mathbb{F}_p^*, \}$ est un sous groupe de $(\mathbb{F}_p^*, \times)$ et trouver son cardinal.
- (2) En déduire que pour tout p premier, au moins $-1, 2$ ou -2 est un carré de $\mathbb{F}_p^*$.
- (3) Montrer que $X^4 + 1$ est irréductible sur $\mathbb{Q}[X]$ mais que pour tout p premier il est réductible dans $\mathbb{F}_p[X]$.

17. L'espace $\mathbb{A}[X]$. _____

On note $\mathbb{A}$ l'ensemble des nombres algébriques de $\mathbb{C}$, c'est à dire les éléments de $\mathbb{C}$ qui admettent un polynôme annulateur dans $\mathbb{Q}[X]$.

- (1) Montrer que $\mathbb{A}$ est un $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel. Quelle est sa dimension?
- (2) Soit $P \in \mathbb{A}[X]$. Montrer que P admet une racine dans $\mathbb{A}$.

18. Un lemme utile (2). _____

Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ irréductible et non nulle. Montrer que P est à racines simples.

19. $X^n - 1 \wedge X^m - 1$. _____

- (1) Soient $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Déterminer $X^n - 1 \wedge X^m - 1$.
- (2) Soient $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Déterminer $X^n - 1 \vee X^m - 1$.

20. Calcul de produit. _____

Calculer, pour $\theta \in [0, 2\pi[$ le produit $\Pi(\theta) = \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n} + \theta\right)$

21. Gauss-Lucas (3). _____

Soient $n \geq m \geq 1$ des entiers. On note $A_{n,m}$ l'ensemble $\{P \in \mathbb{C}_n[X], X^m | P \text{ et } z \in \mathbb{C}^*, P(z) = 0 \implies |z| > 1\}$. Déterminer la borne inférieure de l'ensemble:

$$\{|z|, z \in \mathbb{C}^*, \exists P \in A_{n,m}, P'(z) = 0\}$$

22. La suite $P + \frac{1}{n}$. _____

Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ non constant. Montrer que pour une infinité de $n \geq 1$, $P + \frac{1}{n}$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.



Ralph Henstock et Jaroslav Kurzweil

21. Intégration

1. Borne inférieure d'une intégrale. _____

Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. On considère :

$$E = \{f \in \mathcal{C}^2([a, b]) \mid f(a) = \alpha \text{ et } f(b) = \beta\} \text{ et } e = \inf_{f \in E} \int_a^b f'(t)^2 dt$$

Montrer que e existe et est atteint par une affine.

2. Primitives à la Riemann. _____

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Calculer $\int_a^b e^x dx$ via les sommes de Riemann.

3. Une suite d'intégrales. _____

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx$.

(1) Calculer I_0 et I_1 .

(2) Montrer : $\forall n \geq 2, I_n = \frac{n-1}{n+2} I_{n-2}$. En déduire la valeur de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(3) Étudier la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

(4) Montrer que $n(n+1)(n+2)I_n I_{n-1}$ est une constante et déterminer sa valeur. En déduire un équivalent de I_n au voisinage de $+\infty$.

4. Méthode des trapèzes.



Soit $a < b$ et $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$.

- (1) On pose pour tout $n \geq 1$ $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$. Déterminer la vitesse de convergence de (S_n) ainsi que sa limite.
- (2) On suppose $f \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{R})$, et on pose pour tout $n \geq 1$:

$$T_n = \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) + f\left(a + (k+1) \frac{b-a}{n}\right) \right)$$

Déterminer la vitesse de convergence de (T_n) ainsi que sa limite. Donner une interprétation géométrique à ce résultat.

5. Vitesses de convergence.



Soit $k \geq 1$ et $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, 1-périodique. On note pour tout $n \geq 1$:

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

- (1) On suppose que $k = 2$. Montrer qu'il existe un $C > 0$ tel que $\left| \int_0^1 f(t) dt - S_n \right| \leq \frac{C}{n^2}$ pour tout $n \geq 1$
- (2) Généraliser le résultat précédent pour $k \geq 3$.
- (3) Que dire si $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

6. Deux limites.



Soient $a < b$ et $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$. Trouver un équivalent de (I_n) et la limite de (J_n) , défini pour tout $n \geq 1$:

$$I_n = \int_0^1 f(t) t^n dt \text{ et } J_n = \int_0^1 f(t^n) dt$$

7. Inégalité sur le cercle.



Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, $P = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k$. Montrer que:

$$\max(|a_0|, \dots, |a_n|) \leq \max_{z \in \mathbb{U}} |P(z)|$$

8. Initiation à la norme infinie. _____

Soit $a < b$ deux réels et $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$. On note $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$. Montrer que:

$$\left(\int_a^b |f(t)|^n dt \right)^{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \|f\|_\infty$$

9. Inégalité de Hölder. _____ *

Soient $a < b$ deux réels, $(f, g) \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$, $p > 1$ et $q > 0$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Montrer que:

$$\int_a^b |f(t)g(t)| dt \leq \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}$$

On pourra utiliser l'inégalité de Young

10. Inégalité de Minkowski. _____ *

On reprend les notations de la question précédente. En utilisant habilement l'inégalité de Hölder, montrer l'inégalité de Minkowski:

$$\left(\int_a^b |f(t) + g(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

11. Dérivées uniformément bornées. _____ *

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose qu'il existe un polynôme P de degré impair tel que pour tout $n \geq 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f^{(n)}(x)| \leq |P(x)|$.

- (1) Montrer que f est la fonction nulle.
- (2) Le résultat subsiste-t-il si P est supposé de degré pair?

12. Comparaison polynomiale. _____

Soient $a < b$ deux réels, $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$. On suppose que pour tout $0 \leq k \leq n-1$, $\int_a^b f(t)t^k dt = 0$. Montrer que f change de signe au moins n fois sur $]a, b[$.

13. $\pi^e < e^\pi$. _____

(1) Calculer $\int_e^\pi \frac{dx}{x}$

(2) En déduire que $\pi^e < e^\pi$

14. Inégalités intégrales (1). _____

Soient $a < b$ deux réels.

(1) Soit $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$. Montrer que pour tout $x \in [a, b]$:

$$|f(x)| \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b |f(t)| dt + \int_a^b |f'(t)| dt$$

(2) On suppose que $f(a) = f(b) = 0$, et on note $M = \sup_{x \in [a, b]} |f'(x)|$. Montrer que:

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \frac{M(b-a)^2}{4}$$

et étudier le cas d'égalité.

15. Inégalités intégrales (2). _____

Soient $a < b$ deux réels, $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{C})$ tel que $f(a) = 0$. Montrer les deux inégalités suivantes et caractériser les cas d'égalité:

(1) $\int_a^b |f(x)|^2 dx \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b |f'(x)|^2 dx$

(2) $\int_a^b |f'(x)f(x)| dx \leq \left(\frac{b-a}{2}\right) \int_a^b |f'(x)|^2 dx$

16. Inégalité de Young. _____

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable, strictement croissante et vérifiant $f(0) = 0$.

(1) Montrer que pour tout $x \geq 0$:

$$\int_0^x f(t) dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t) dt = xf(x)$$

(2) En déduire que pour tout $a, b > 0$:

$$\int_0^a f(t) dt + \int_0^b f^{-1}(t) dt \geq ab$$

17. Étude d'une suite. _____

Pour tout $n \geq 1$ on pose $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{n}{n^2 + k^2}$. Montrer que (u_n) converge vers une limite ℓ et trouver un équivalent de $(\ell - u_n)$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

18. Fonction β . _____

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, on pose:

$$\beta(a, b) = \int_0^1 x^a (1-x)^b dx$$

(1) Montrer que pour tout $a \geq 0, b \geq 1$, $\beta(a, b) = \frac{b}{a+1} \beta(a+1, b-1)$

(2) En déduire que $\beta(a, b) = \frac{a!b!}{(a+b+1)!}$

(3) Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, $\sum_{k=0}^b \binom{b}{k} \frac{(-1)^k}{a+k+1} = \frac{a!b!}{(a+b+1)!}$

(4) Pour $\alpha > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, montrer l'identité:

$$\int_0^1 (1-x^\alpha)^n dx = \frac{n! \alpha^n}{\prod_{k=1}^n (\alpha k + 1)}$$

19. Intégrales de Wallis et équivalent de Stirling. _____

Pour tout $n \geq 0$, on pose $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\theta)^n d\theta$.

(1) Montrer que pour tout $n \geq 0$, $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta)^n d\theta$

(2) Montrer que la suite (W_n) est décroissante. En déduire qu'elle converge.

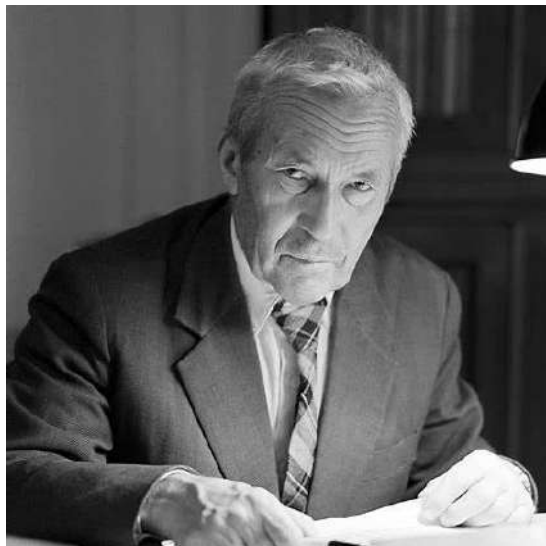
(3) Montrer que pour tout $n \geq 0$, $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$. En déduire des formules explicites ne dépendant que de n de W_{2n} et W_{2n+1} .

(4) Déterminer un équivalent lorsque $n \rightarrow \infty$ de (W_n) .

(5) En déduire que $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$

20. Intégration de deux puissance décalées. _____

Déterminer, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, $I_{p,q} = \int_a^b (x-a)^p (x-b)^q dx$.



“At any moment there is only a fine layer between the ‘trivial’ and the impossible. Mathematical discoveries are made in this layer.” - Andrey Nikolaevich Kolmogorov

22. Dénombrement et probabilité

1. Parties sans paires. _____ ✎

Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$. On note F_n^p l'ensemble des parties de $\mathbb{N}_n$ de cardinal p ne contenant aucune paire d'entiers consécutifs et $K_n^p = |F_n^p|$.

- (1) Déterminer K_n^p pour $p > \frac{n+1}{2}$.
- (2) On suppose maintenant $p \leq (n+1)/2$. Soit $(a_1, \dots, a_p) \in F_n^p$ tel que $a_1 < \dots < a_p$. On pose, pour tout $k \in \mathbb{N}_p$, $b_k = a_k + 1 - k$. Montrer : $1 \leq b_1 < \dots < b_n \leq n+1-p$.
- (3) On note G_n^p l'ensemble des parties de $\mathbb{N}_{n+1-p}$ de cardinal p . Construire une bijection entre F_n^p et G_n^p . Déterminer ainsi K_n^p .

2. Événements toujours dépendants. _____ ✓ ✎

Soit un univers Ω d'un espace probabilisé tel que $|\Omega|$ soit fini et premier. On choisit un modèle d'équiprobabilité sur cet univers. Prouver que deux événements non triviaux (i.e. non égaux à $\emptyset$ où Ω) ne peuvent être indépendants.

3. Inégalité d'indépendance. _____ ✎

Soit Ω un univers d'un espace probabilisé, A, B deux événements. Montrer que:

$$|P(A)P(B) - P(A \cap B)| \leq \frac{1}{4}$$

4. Inégalité du train.

Soit $a_1 \leq \dots \leq a_n$ et $b_1 \leq \dots \leq b_n$, $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n)$. Pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on note $(ab)_\sigma$ le n -uplet $(a_1 b_{\sigma(1)}, \dots, a_n b_{\sigma(n)})$. Finalement, pour tout $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ n -uplet, on note $\mu(X)$ sa moyenne:

$$\mu(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

- (1) Montrer que $\min_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mu((ab)_\sigma) \leq \mu(a)\mu(b)$
- (2) Montrer que $\mu((ab)_\sigma) \leq \mu((ab)_{\text{Id}})$ quelque soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$

5. Polynômes aléatoires dans $\mathbb{F}_p[X]$.

Soit $n \geq 1$. On note P une variable aléatoire à valeurs dans les polynômes unitaires de degré n de $\mathbb{F}_p[X]$ suivant une loi uniforme. On note N le nombre de racines de P et N' le nombre de racines de P comptés avec multiplicité.

- (1) Montrer que $\mathbb{E}(N) = 1$, et calculer $\mathbb{V}(N)$.
- (2) Montrer que $\mathbb{E}(N') = \frac{1 - p^{-n}}{1 - p^{-1}}$

6. Marche aléatoire dans $\mathbb{Z}$.

Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une suite de variables aléatoires suivant une loi uniforme dans $\{-1, 1\}$. Pour tout $n \geq 0$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^n X_k$.

- (1) Trouver la probabilité $\mathbb{P}(S_n = k)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.
- (2) Déterminer un équivalent au voisinage de l'infini de $\mathbb{P}(S_n = 0)$.

7. Deux dés pipés.

Montrer qu'il est impossible de piper deux dés à six faces de telle sorte que la somme des faces roulés suivent une loi uniforme sur $[2, 12]$.

8. Déterminant aléatoire.

Soit $n \geq 1$ et $(X_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une famille de variables aléatoires discrètes indépendantes centrées réduites. On note $X = (X_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice associée et $D = \det(X)$ une variable aléatoire.

- (1) Déterminer $\mathbb{E}(D)$ et $\mathbb{V}(D)$.

- (2) En déduire que pour tout $a > 0$, $\mathbb{P}(|D| \geq a\sqrt{n!}) \leq \frac{1}{a^2}$
- (3) Montrer qu'il existe $M \in \mathcal{M}_n(\{-1, 1\})$ tel que $\det(M) \geq \sqrt{n!}$

9. Merci Bartho!

Soit $p \in]0, 1[$, $n \geq 1$ et $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$. Déterminer $\max_{0 \leq k \leq n} \mathbb{P}(X = k)$.

10. Inégalité factorielle.

Soit $n \geq 1$ et $\ell_1, \dots, \ell_k$ des entiers naturels tels que $\ell_1 + \dots + \ell_k = n$. Montrer que:

$$k! \prod_{i=1}^k \ell_i! \leq n!$$

11. Ensembles à représentations infinies. *

On dit que $A \subset \mathbb{N}^*$ est à représentations infinies si pour tout $C > 0$ il existe un entier N qui peut s'écrire comme la somme de deux éléments de A de plus de C manières différentes.

- (1) Montrer que si $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ est strictement croissante et vérifie $f(n+1) - f(n) = \mathcal{O}(f(n)^\alpha)$ pour un $\alpha \in [0, 1/2[$ alors l'ensemble $f(\mathbb{N}^*)$ est à représentations infinies.
- (2) On note $\pi(n)$ le nombre de nombres premiers plus petit que n . Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ tel que pour tout $n \geq 2$:

$$C \frac{n}{\ln(n)} \leq \pi(n)$$

- (3) En déduire que l'ensemble des nombres premiers est à représentations infinies.

12. Un théorème d'Erdős. *

Soit $\mathbb{K}$ un corps fini. On dit que $K \subset \mathbb{K}$ est sans somme lorsque pour tout $(k_1, k_2) \in K^2$, $k_1 + k_2 \notin K$.

- (1) Soient A, B deux parties non vides de $\mathbb{K}^*$ et $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\mathbb{K}^*)$. On pose alors $N = |A \cap XB|$. Calculer $\mathbb{E}(N)$.
- (2) En déduire que si B est sans sommes alors A contient une partie sans somme de cardinal égale au moins à $\frac{|A| |B|}{|\mathbb{K}^*|}$.
- (3) Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $3k + 2$.
- (4) Soit p un nombre premier de la forme $3k + 2$. Construire une partie de $\mathbb{F}_p^*$ sans somme de cardinal $k + 1$.

- (5) En déduire que pour toute partie $A \subset \mathbb{Z}$, A contient une partie sans somme de cardinal strictement supérieur à $\frac{|A|}{3}$.

13. Nombre de cycles dans les permutations.



- (1) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $U_1, \dots, U_n$ des variables aléatoires indépendantes telles que, si $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $U_i \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, i \rrbracket)$. Déterminer la loi de la permutation aléatoire

$$\sigma = (1 \ U_1) \circ (2 \ U_2) \circ \dots \circ (n \ U_n).$$

- (2) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, σ_n une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{U}(\mathfrak{S}_n)$, C_n le nombre de cycles de σ_n . Montrer que l'on a

$$C_n \sim B_1 + \dots + B_n$$

où $B_1, \dots, B_n$ sont des v.a.d. indépendantes telles que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $B_i \sim \mathcal{B}(\frac{1}{i})$.

- (3) Déterminer, pour $\varepsilon > 0$, la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{C_n}{\ln(n)} - 1\right| \geq \varepsilon\right).$$

14. Inégalité de Hoeffding.



On va montrer ici le fameux inégalité de Hoeffding, un classique des concours Mines/X/ENS et un résultat célèbre pour ses hypothèses laxistes et sa démonstration élémentaire. Elle constitue une amélioration surprenante de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

- (1) Soit X une v.a.d telle que $|X| \leq 1$ $\mathbb{P}$ -p.s et $\mathbb{E}(X) = 0$. Montrer que:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \mathbb{E}(e^{tX}) \leq \cosh(t)$$

- (2) En déduire la majoration $\mathbb{E}(e^{tX}) \leq e^{\frac{t^2}{2}}$
- (3) On va maintenant commencer à montrer l'inégalité de Hoeffding: Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ des v.a.d centrées, indépendantes, $(c_k) \in \mathbb{R}_+^*$ tels que pour tout $k \geq 0$, $|X_k| \leq c_k$ $\mathbb{P}$ -p.s. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\mathbb{P}(|S_n| > \varepsilon) \leq 2 \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2 \sum_{k=0}^n c_k^2}\right) \text{ avec } S_n = \sum_{k=0}^n X_k$$

Dans un premier temps, montrer que $\mathbb{P}(S_n > \varepsilon) \leq \exp\left(\frac{t^2 a}{2} - t\varepsilon\right)$ pour $t > 0$, avec $a = \sum_{k=0}^n c_k^2$

(On pourra commencer par remarquer que $\mathbb{P}(S_n > \varepsilon) = \mathbb{P}(e^{tS_n} > e^{t\varepsilon})$ puis appliquer Markov.)

- (4) En déduire que $\mathbb{P}(S_n > \varepsilon) \leq \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2a}\right)$. Trouver une inégalité similaire pour $\mathbb{P}(S_n < -\varepsilon)$.
- (5) Conclure.

- (6) Comparer l'inégalité de Hoeffding à l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev dans le cas où pour tout $k \geq 0$, $X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ avec $p \in]0, 1[$.

15. Formule du crible et application.



- (1) Soit Ω un ensemble non vide et $(A_i)_{i \geq 1}$ une suite de parties finies de Ω . Montrer que:

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{i_1 < \dots < i_k} \left| \bigcap_{j=1}^k A_{i_j} \right|$$

- (2) En déduire l'inégalité de l'union: $\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| \geq \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j|$

- (3) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\{0, 1\})$ une matrice binaire ayant k coordonnées égales à 0. Montrer que si $k \leq n$, alors:

$$\text{perm}(A) \leq n! \left(1 - \frac{k}{2n} \right)$$

$$\text{Avec } \text{perm}(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)}$$

16. Urnes d'Ehrenfest.



Soit $N \geq 1$. On considère deux pièces A et B séparées par une trappe, où A contient $2N$ boules et B est vide. On ouvre la trappe, et à chaque instant n une boule est choisie aléatoirement et placée dans la pièce opposée à celle où elle se trouve. Soit X_n la variable aléatoire désignant le nombre de boules dans la pièce A après n itérations, et $Z_n = X_n/2N$.

- (1) Montrer que:

$$\mathbb{P}(X_n > k) = \mathbb{P}(X_{n-1} > k+1) + \frac{2N-k-1}{2N} \mathbb{P}(X_{n-1} = k+1) + \frac{2N-k}{2N} \mathbb{P}(X_{n-1} = k)$$

- (2) En déduire que $\mathbb{E}(X_n) = 1 + \left(1 - \frac{1}{N} \right) \mathbb{E}(X_{n-1})$

- (3) En déduire un équivalent de $\mathbb{E}(Z_{2Nt})$ lorsque $t \rightarrow \infty$. Donner une interprétation physique.

17. Espérance de la norme.



Soit $n \geq 1$ et soit $X_n \hookrightarrow \mathcal{U}(\{0, 1\}^n)$, $\|\cdot\|$ la norme euclidienne. Montrer que:

$$\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P} \left(\left| \frac{\|X_n\|}{\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right| \geq \varepsilon \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

On dit que $X_n/\sqrt{n}$ converge en probabilité vers $\sqrt{2}/2$.

18. $M_n = \min(X_1, \dots, X_n)$.

Soit $N \geq 1$ et $(X_k)_{k \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la même loi sur $\{1, \dots, N\}$ telle que, pour tout $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$, $\mathbb{P}(X_1 = k) > 0$.

- (1) Pour tout $n \geq 1$, on note $M_n = \min(X_1, \dots, X_n)$. Déterminer $\mathbb{P}(M_n = 1)$ et en déduire sa limite lorsque $n \rightarrow \infty$.
- (2) On note $T = \min_{n \geq 1} \{M_n = 1\}$. Déterminer la loi de T ainsi que son espérance $\mathbb{E}(T)$.

19. Problème du collectionneur.

Chaque paquet de céréales contient une vignette à collectionner, que l'on ne découvre qu'à l'ouverture du paquet. On se demande combien il faut ouvrir de paquets pour posséder au moins un exemplaire de chacune des n vignettes. On décompose ce nombre en $N_n = \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_n$ où τ_k est le nombre de paquets supplémentaires nécessaires pour obtenir k vignettes différentes quand on en a déjà $k - 1$ différentes.

- (1) Justifier que τ_k suit une loi géométrique, dont on précisera le paramètre.
- (2) En déduire l'espérance de N_n et en donner une valeur approchée.
- (3) On admet que les variables aléatoires $(\tau_k)_{1 \leq k \leq n}$ sont indépendantes (le justifier intuitivement).
 - a) En déduire la variance de N_n et montrer que $\mathbb{V}(N_n) \leq Cn^2$ pour une constante C .
 - b) En déduire que, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\mathbb{P}(|N_n - \mathbb{E}(N_n)| > \varepsilon n \ln(n)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Puis, pour tout $\varepsilon' > 0$:

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{N_n}{n \ln(n)} - 1\right| > \varepsilon'\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

20. Nombres de Catalan. *

On se place sur une grille dont les nœuds sont de coordonnées entières. On considère les chemins de cette grille que l'on peut obtenir uniquement en se déplaçant d'un nœud (x, y) aux nœuds $(x + 1, y + 1)$ ou $(x + 1, y - 1)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on s'intéresse aux chemins de Dyck de longueur $2n$, c'est-à-dire aux chemins qui relient les points $(0, 0)$ et $(2n, 0)$ sans jamais passer en dessous de l'axe des abscisses. On appelle nombre de Catalan C_n le nombre de chemins de Dyck de longueur $2n$.

- (1) On pose $C_0 = 1$. Justifier que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}, C_{n+1} = \sum_{k=0}^n C_k \cdot C_{n-k}$.
- (2) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$.
- (3) Retrouver ce résultat par un raisonnement combinatoire.



“It is by logic that we prove, but by intuition that we discover.” - Henri Poincaré

23. Topologie dans $\mathbb{R}^n$

Dans ce chapitre, $(E, \|\cdot\|)$ désigne toujours un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normée.

1. Quelques contre exemples. _____ ✓

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normée.

- (1) Montrer que l'union quelconque d'ouverts est un ouvert et que l'intersection fini d'ouverts est un ouvert. Trouver un contre exemple à l'affirmation “L'intersection dénombrable d'ouverts est un ouvert”.
- (2) Montrer que l'intersection quelconque de fermés est un fermé et que l'union fini de fermés est un fermé. Trouver un contre exemple à l'affirmation “L'union dénombrable de fermés est un fermé”.

2. Complétude et précompacité. _____ ✎

On dit que $(E, \|\cdot\|)$ (resp. $K \subset E$) est complet lorsque toute suite de Cauchy de E (resp. K) converge dans E (resp. K). Soit $K \subset E$. On dit que K est précompact lorsque pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n \geq 1$, $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$ tel que:

$$K \subset \bigcup_{k=1}^n B(x_k, \varepsilon)$$

Soit $K \subset E$. Montrer que K est un compact de E si et seulement si K est précompact et complet.

3. Caractérisation de Borel-Lebesgue.



La définition des classes préparatoires de la complétude est la suivante: $K \subset E$ est compact si pour toute suite d'éléments de K il existe une sous suite convergente dans K (on notera cette condition **(BW)** par la suite). Il existe néanmoins une autre caractérisation, toute aussi utile que celle-ci, équivalente: celle de Borel-Lebesgue. Elle dit que $K \subset E$ est compact si et seulement si pour tout recouvrement d'ouverts arbitraire de K , il existe un sous recouvrement fini (on notera cette condition **(BL)** par la suite). On se propose de le montrer ici, puis de donner une application algébrique dans l'exercice suivant.

- (1) Soit $K \subset E$ qui vérifie **(BW)**. Montrer que K est alors précompact (voire exercice précédent).
- (2) En déduire que si K vérifie **(BW)** alors si $(O_i)_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de K (i.e famille d'ouverts telle que $K \subset \bigcup_{i \in I} O_i$), alors il existe un rayon $r > 0$ tel que pour tout $x \in K$, il existe $i \in I$ tel que $B(x, r) \subset O_i$.
- (3) En déduire que si K satisfait **(BW)**, alors K satisfait **(BL)**.
- (4) On montre alors la réciproque: soit $K \subset E$ qui vérifie **(BL)**. Soit $(u_n) \in K^{\mathbb{N}}$. Pour tout $n \geq 0$, on note $F_n = \{u_p, p \geq n\}$. Montrer que:

$$\bigcap_{n \geq 0} \overline{F_n} \neq \emptyset$$

Avec $\overline{F_n}$ l'adhérence de F_n .

- (5) En déduire que **(BL)** implique **(BW)** (On pourra choisir un ℓ dans l'intersection ci-dessus et construire une sous suite convergente à la main...)
- (6) En déduire le théorème de Borel-Lebesgue: les compacts de $\mathbb{R}^n$ sont exactement les fermées bornées de $\mathbb{R}^n$.



FIGURE 26. Le café Roquemaurel, point de rendez-vous de l'équipe

4. Idéaux de $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$.

Soit $K \subset E$ un compact. On se permet d'utiliser la caractérisation de Borel-Lebesgue énoncé, puis montré à l'exercice précédent. On note $\mathcal{C}(K)$ l'ensemble des fonctions continues sur K à valeurs réels.

- (1) Soit I une partie non vide de $\mathcal{C}(K)$. On suppose que pour tout $x \in K$, il existe $f \in I$ tel que $f(x) \neq 0$. Montrer qu'il existe $(f_1, \dots, f_n) \in I^n$ tel que la fonction $f_1^2 + \dots + f_n^2$ ne s'annule pas sur K .
- (2) Soit I un idéal strict de $\mathcal{C}(K)$. Montrer qu'il existe un $a \in K$ tel que $f(a) = 0$ pour tout $f \in I$.
- (3) Pour $a \in K$, on note $I_a = \{f \in \mathcal{C}(K), f(a) = 0\}$. Montrer que I_a est maximal et que réciproquement tout idéal maximal de $\mathcal{C}(K)$ est de cette forme.

5. Convexes non bornées de $\mathbb{R}^n$. _____



Soit $n \geq 1$ et $C \subset \mathbb{R}^n$ convexe et non borné. Montrer que C contient une demi droite.

6. Lemme de Riesz. _____



Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension quelconque (fini, infini). On suppose que $B_f(0, 1)$ est compact.

- (1) Montrer l'existence de $(x_1, \dots, x_n) \in B_f(0, 1)$ tels que:

$$B_f(0, 1) \subset \bigcup_{k=1}^n B\left(x_k, \frac{1}{2}\right)$$

- (2) En déduire le théorème de Riesz: E est de dimension finie si et seulement si $B_f(0, 1)$ est compact.
 (3) On suppose E de dimension finie. Montrer que si F est un sous espace vectoriel de E alors F est d'intérieur vide.
 (4) Le résultat subsiste-t-il en dimension infinie?

7. Courbes de Lissajous. _____



On se place sur un rectangle $[-a, a] \times [-b, b]$ où $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ (les demi-longueurs de nos ressorts). On définit alors une famille de points comme suit :

$$\forall (\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{R}^2, \forall \phi \in \mathbb{R}, \mathcal{L}(\omega_1, \omega_2, \phi) = \{(a \sin(\omega_1 t), b \sin(\omega_2 t + \phi)), t \in \mathbb{R}_+\}$$

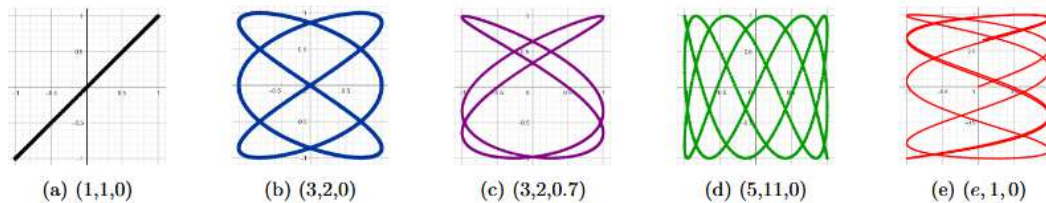


FIGURE 27. Quelques exemples

On va s'intéresser à la courbe tracé par les point $\mathcal{L}(\omega_1, \omega_2, \phi)$, que l'on appelle courbe de Lissajous associées aux pulsations ω_1 et ω_2 et de retard ϕ .

- (1) Montrer que l'on peut considérer $a = b = 1$, $\phi > 0$ et fixer l'une des deux pulsation égale à 1 sans changer la généralité de l'étude topologique des courbes.

On se placera donc sur $[-1, 1]^2$ et nous adopterons la définition suivante des courbes de Lissajous :

$$\forall \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall \phi \in \mathbb{R}_+, \mathcal{L}(\eta, \phi) = \{(\sin(t), \sin(\eta t + \phi)), t \in \mathbb{R}_+\}$$

- (2) Montrer que $\mathcal{L}(\eta, \phi)$ est dense dans $[-1, 1]^2$ si et seulement si η est irrationnel. On comprend alors pourquoi il est inutile d'essayer de compléter la courbe dans l'exemple (e) si dessus.

- (3) On pose η rationnel positif, et l'on note $\eta = p/q$ avec $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $p \wedge q = 1$. Montrer que $\mathcal{L}(\eta, \phi)$ est $2q\pi$ -périodique et que cette période est minimale.
- (4) Soit $\eta \in \mathbb{Q}_+^*$. On pose donc $\eta = p/q$ avec $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $p \wedge q = 1$. Montrer alors que :
- Si p est pair ou si q est pair, $\mathcal{L}(\eta, \pi/q) = \mathcal{L}(\eta, 0)$.
 - Si p et q sont impairs, $\mathcal{L}(\eta, \pi/q) = \overline{\mathcal{L}(\eta, 0)}$ où $\overline{\mathcal{L}(\eta, 0)}$ représente la courbe issue de la symétrie de $\mathcal{L}(\eta, 0)$ par rapport à l'axe des abscisses.

8. Ensembles à points isolés.

Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble tel que tout ses points sont isolés. Montrer que A est au plus dénombrable.

9. Relations d'ordre avec l'intérieur et l'adhérence.

Soit $(A_k)_{k \geq 0}$ une suite de parties de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$.

- (1) Montrer que $\overline{\bigcup_{k=0}^N A_k} = \bigcup_{k=0}^N \overline{A_k}$ et que $\bigcup_{k=0}^{\infty} \overline{A_k} \subseteq \overline{\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k}$. En déduire les relations d'ordre qui s'ensuivent pour l'intérieur.
- (2) Montrer que $\overline{\bigcap_{k=0}^N A_k} \subseteq \bigcap_{k=0}^N \overline{A_k}$ et que $\overline{\bigcap_{k=0}^{\infty} A_k} \subseteq \bigcap_{k=0}^{\infty} \overline{A_k}$. En déduire les relations d'ordre qui s'ensuivent pour l'intérieur.
- (3) Trouver des contre-exemples pour les inclusions réciproques dans les cas où on a seulement l'inclusion.

10. CNS pour que E soit complet.

Montrer qu'un espace vectoriel normé E est complet si et seulement si toute série absolument convergente $\sum_{n \geq 0} u_n$ est convergente (absolument convergente pour $\|\cdot\|$)

11. Existences de fonctions exotiques.

- (1) Existe-t-il $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continue et injective?
- (2) Existe-t-il $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continue, surjective, tel que $f^{-1}(\{0\})$ est compact?

12. Suites d'ouverts non bornées de $\mathbb{R}_+$.

Soit $(O_n)_{n \geq 0}$ une suite d'ouverts non bornées de $\mathbb{R}_+$. Montrer qu'il existe un $x > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x\mathbb{N} \cap O_n$ soit infini.

13. Ouverts de $\mathbb{R}$.

Soit $O \subseteq \mathbb{R}$ ouvert. Montrer que O est réunion d'intervalles ouverts deux à deux disjoint.

14. Convexes fermés de $\mathbb{R}^n$.

Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ fermé. On suppose que pour tout $(x, y) \in C$, $]x, y[\cap C \neq \emptyset$. Montrer que C est convexe.

15. Caractérisations d'ouverts et de fermés.

- (1) Soit $O \subset E$. Montrer que O est ouvert si et seulement si son complémentaire est fermé.
- (2) Montrer que F est fermé si et seulement si Pour tout suite convergente d'éléments de F , la limite appartient à F .

16. L'ensemble des valeurs d'adhérence est un fermé.

Soit (u_n) une suite de E . On suppose que l'ensemble des valeurs d'adhérence noté V de la suite (u_n) est non vide. On va montrer qu'il est fermé.

- (1) *Première méthode:* Montrer que $V = \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{\{u_p, p \geq n\}}$. Conclure.
- (2) *Deuxième méthode:* Montrer, à l'aide de la caractérisation séquentielle des fermés, que V est fermé (faire un dessin!).

17. Normes équivalentes.

On dit que deux normes sur E notés $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes lorsqu'il existe $0 < a < b$ vérifiant $a\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_2 \leq b\|\cdot\|_1$. On note alors $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$.

- (1) Montrer que la relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des normes de E . En déduire que si $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$ alors ces normes définissent la même topologie sur E (i.e les mêmes ouverts, les même fermés...)

- (2) Soit $\|\cdot\|$ une norme euclidienne sur E , et $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$. Montrer l'identité du parallélogramme généralisé:

$$\sum_{\varepsilon \in \{-1,1\}^n} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \right\|^2 = 2^n \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2$$

- (3) On prend $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, et on note $\|\cdot\|_\infty$ la norme infinie, qui est le sup de $f \in E$ en valeur absolue sur $[0,1]$. Montrer que la norme $\|\cdot\|_\infty$ est équivalente à aucune norme euclidienne.

18. Équivalence des normes en dimension finie.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. On souhaite montrer que toutes les normes sont équivalentes, et que donc le choix de norme n'est pas importante (on a défini la notion de normes équivalentes à l'exercice précédente).

- (1) Montrer qu'en dimension finie, la sphère unité $\mathcal{S}(0,1) = \{x \in E, \|x\| = 1\}$ est compact.
- (2) Soit $\|\cdot\|_2$ une deuxième norme. Justifier que l'application $x \mapsto \|x\|_2$ est bornée sur $\mathcal{S}(0,1)$ et que sa borne inférieure est > 0 .
- (3) Conclure.

19. Topologie dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ (on montrera d'abord qu'il s'agit bien d'une norme). En déduire la nature topologie de l'ensemble $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \text{rg}(M) \geq r\}$ pour $r \geq 0$.

20. Lemme de Baire et applications.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé complet. On souhaite montrer le lemme de Baire:

Si $(O_n)_{n \geq 0}$ est une famille d'ouverts denses de E , alors $\bigcap_{n=0}^{\infty} O_n$ est une partie dense de E .

- (1) On reprend les notations de l'énoncé du lemme. Soit V un ouvert de E . Montrer que l'on peut construire une suite de boules fermées $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui respecte les deux conditions suivantes:
 - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, B_n est de rayon inférieur ou égale à $\frac{1}{2^n}$
 - $B_0 \subset V \cap O_0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_{n+1} \subset O_{n+1} \cap \overset{\circ}{B}_n$
- (2) En déduire le lemme de Baire.
- (3) *Application 1:* Soit E un espace vectoriel normé de dimension dénombrable (ie admet une base dénombrable). Montrer que E ne peut pas être complet.
- (4) *Application 2:* Soit E un espace vectoriel normé engendré par une partie compact K . Montrer que E est de dimension finie.

21. Espaces des courbes fractales.



L'exercice qui suit est magnifique mais est impossible à traiter sans le cours de spé sur les fonction linéaires continues et une habilité remarquable avec la topologie. Ne traitez cet exercice que si vous avez le temps et la patience!

On appelle fonction fractale une application qui est continue sur son ensemble de définition mais dérivables nul part. On montre dans cette partie que, non seulement ces fonctions existent (qui est un fait parfaitement non trivial), mais sont dense dans $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$:

$$\forall f \in E, \|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$$

On fixe $a \in]\frac{1}{2}, 1[$, $n \in \mathbb{N}$ et on note pour $k \in \llbracket 0, 2^n - 1 \rrbracket$:

$$U_{n,k} = \left\{ \phi \in E, \left| \phi\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - \phi\left(\frac{k}{2^n}\right) \right| > a^n \right\}$$

Et on note $\tau(E)$ l'ensemble des ouverts de E .

- (1) Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ définit bien une norme sur E .
- (2) Montrer que $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé complet.
- (3) Montrer que:

$$\Lambda_{n,k} : \phi \mapsto \left| \phi\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - \phi\left(\frac{k}{2^n}\right) \right|$$

est continue sur E .

- (4) En déduire que $U_{n,k}$ est un ouvert, et de ce fait:

$$\bigcap_{k=0}^{2^n-1} U_{n,k} \in \tau(E)$$

On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$V_n = \bigcup_{m \geq n} U_m$$

- (5) Soit $\varepsilon > 0$. Justifier que pour tout $\phi \in E$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$ et pour tout $k \in \llbracket 0, 2^n - 1 \rrbracket$, $\left| \phi\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - \phi\left(\frac{k}{2^n}\right) \right| \leq \varepsilon$
- (6) En déduire qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \in \llbracket 0, 2^m - 1 \rrbracket$ et $\phi \in E$, $\Lambda_{m,k}(\phi) \leq \varepsilon$ et $a^m < \varepsilon$
- (7) On pose $\psi : x \mapsto \phi(x) + \varepsilon \cos(2^m \pi x)$. Montrer que $\psi \in U_m$ et $\|\psi - \phi\|_\infty \leq \varepsilon$, et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, V_n est dense dans E .
- (8) En déduire de tout ce qui précède que:

$$\overline{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n} = E$$

- (9) On note $X = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n$. Soit $x_0 \in [0, 1]$, et $\phi \in X$. Justifier qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tel que $\varphi(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ telle que:

$$\Lambda_{\varphi(n),k}(\phi) > a^{\varphi(n)}$$

- (10) On pose $k_n := \lfloor 2^{\varphi(n)} x_0 \rfloor$, $u_n = \frac{k_n}{2^{\varphi(n)}}$ et $v_n = \frac{k_n + 1}{2^{\varphi(n)}}$ si $x_0 \neq 1$, et sinon $u_n = 1 - \frac{1}{2^{\varphi(n)}}$ et $v_n = 1$. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes et déterminer leur limites communes.

(11) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left| \frac{\phi(u_n) - \phi(v_n)}{u_n - v_n} \right| > (2a)^{\varphi(n)}$$

(12) Conclure que ϕ est continue partout sur $[0, 1]$ mais dérivable nul part, et que l'ensemble des fonctions vérifiant cette condition est dense dans E pour la norme $\|\cdot\|_\infty$

22. Ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$ tels que $A = \partial\Omega$. _____ ✎💡

Décrire les sous ensembles $A \subseteq \mathbb{R}^n$ qui s'écrivent comme la frontière d'un autre ensemble $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.

23. Polynômes scindés à racines simples dans $\mathbb{R}_n[X]$. _____ ✓

En utilisant le résultat établi à l'exercice 21 du chapitre sur les déterminants, montrer que l'ensemble des polynôme scindés à racines simples de $\mathbb{R}_n[X]$ est un ouvert de ce dernier.

24. L'espace pré-hilbertien $\mathbb{R}[X]$. _____ ✎

Soit $x \in \mathbb{R}$. On munit $\mathbb{R}[X]$ avec le produit scalaire suivant:

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2, \langle P|Q \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} P^{(k)}(x)Q^{(k)}(x)$$

Et on note la norme induite $\|\cdot\|$.

(1) Montrer qu'il s'agit bien d'un produit scalaire.

(2) Est-ce que $(E, \|\cdot\|)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel complet?