



Exercices de retour des anciens

Une collection.



Jacques Tarr jacquestarmaths@gmail.com
Victor Kalfon
Gabriel Murillo

18/12/2025

EXERCICES DU RETOUR DES ANCIENS

J.J.T

INTRODUCTION

Ceci est une planche d'exercices que les anciens de Fermat ont utilisée pour coller les élèves de la MP* en 2026, avec des éléments de corrections. Si vous cernez des erreurs ou des fautes de frappe, signalez-les à l'équipe ! On a décidé d'écrire qui a écrit quel corrigé, comme ça vous pouvez les contacter directement. Le texte est séparé en plusieurs rubriques en fonction de la provenance des concours.

1. X/ENS

Exercice 1 [ENS]

Soit $(u_n) \in \ell^1(\mathbb{N})$ strictement positif. On suppose qu'il existe $0 < p < q$ tel que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n^p \leq 1 \text{ et } \sum_{n=0}^{\infty} u_n^q \leq 1$$

Montrer que pour tout $r \in [p, q]$, $\sum_{n=0}^{\infty} u_n^r \leq 1$.

Corrigé proposé par J.J.T : Soit $r \in]p, q[$. On remarque que, lorsque $u_n \geq 1$, $u_n^r \leq u_n^q$ et lorsque $u_n \leq 1$, $u_n^r \leq u_n^p$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n^r \leq u_n^p + u_n^q$. Ceci n'est malheureusement pas suffisant, car elle conduit à l'inégalité trop large :

$$\forall r \in [p, q], \sum_{n=0}^{\infty} u_n^r \leq \sum_{n=0}^{\infty} u_n^p + u_n^q \leq 2$$

Néanmoins, cela va nous être utile. Soit $M \in \mathbb{N}^*$. On définit le produit tensoriel $u^{\otimes M}(n_1, \dots, n_M)$ pour $(n_1, \dots, n_M) \in \mathbb{N}^M$:

$$u^{\otimes M}(n_1, \dots, n_M) = \prod_{i=1}^M u_{n_i}$$

Avec le même raisonnement qu'avant, on obtient $u^{\otimes M}(v)^r \leq u^{\otimes M}(v)^p + u^{\otimes M}(v)^q$ pour tout $v \in \mathbb{N}^M$. En sommant, on peut appliquer Fubini car tout est positif :

$$\left(\sum_{(n_1, \dots, n_M) \in \mathbb{N}^M} u^{\otimes M}(n_1, \dots, n_M)^r \right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n^r \right)^M \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n^p \right)^M + \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n^q \right)^M \leq 2$$

On en tire que $\sum_{n=0}^{\infty} u_n^r \leq \sqrt[M]{2}$ et on déduit le résultat en prenant la limite lorsque $M \rightarrow \infty$. $\square$

Exercice 2 [ENS]

On dit que $A \subset \mathbb{N}^*$ est à représentations infinies si pour tout $C > 0$ il existe un entier N qui peut s'écrire comme la somme de deux éléments de A de plus de C manières différentes.

- (1) Montrer que si $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ est strictement croissante et vérifie $f(n+1) - f(n) = \mathcal{O}(f(n)^\alpha)$ pour un $\alpha \in [0, 1/2[$ alors l'ensemble $f(\mathbb{N}^*)$ est à représentations infinies.
- (2) On note $\pi(n)$ le nombre de nombres premiers plus petit que n . Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ tel que pour tout $n \geq 2$:

$$C \frac{n}{\ln(n)} \leq \pi(n)$$

- (3) En déduire que l'ensemble des nombres premiers est à représentations infinies.

Corrigé proposé par J.J.T :

- (1) On reprend les notations de l'énoncé. Il existe un $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(n+1) - f(n) \leq Mf(n)^\alpha$ pour un certain $\alpha \in [0, 1/2[$. On introduit alors la quantité :

$$\forall n \geq 2, S_n = \max_{1 \leq k \leq n-1} (f(k+1) - f(k)) \leq Mf(n)^\alpha$$

Par croissance stricte de f . On pose $A_n = f([1, n])$ et $A_n + A_n = \{f(i) + f(j), 1 \leq i, j \leq n\}$. Alors on a trivialement $|A_n| = n$ et $|A_n + A_n| \leq 2f(n)$. Montrons alors le lemme suivant, un classique de la combinatoire additive :

Lemme : Soit A, B deux parties finies de $\mathbb{N}$. On note $A + B = \{a + b, (a, b) \in A \times B\}$ et $\Pi : A \times B \rightarrow A + B$ la surjection canonique. Finalement, on pose pour tout $z \in A + B$, $\ell(z) = |\Pi^{-1}(\{z\})|$, $L = \max_{z \in A+B} \ell(z)$. Alors on a l'inégalité suivante :

$$\Delta(A, B) = \frac{|A| \times |B|}{|A + B|} \leq L$$

Avec $\Delta(A, B)$ le coefficient de dilatation du couple (A, B) .

Preuve : Il suffit de l'écrire :

$$A \times B = \coprod_{z \in A+B} \Pi^{-1}(\{z\}) \implies |A| \times |B| = \sum_{z \in A+B} \ell(z) \leq L|A + B|$$

D'où le résultat. Appliquons ce dernier à l'ensemble A_n ; on trouve alors :

$$\frac{n^2}{2f(n)} \leq \Delta(A_n, A_n) \leq L_n$$

Avec ici L_n la quantité analogue à L dans la démonstration mais pour A_n . Il est clair que l'on veut montrer que $L_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$. Or :

$$f(n) = \sum_{k=1}^{n-1} (f(k+1) - f(k)) + f(1) \leq nS_n + f(1) \leq M|A_n|f(n)^\alpha + f(1)$$

On en tire l'inégalité suivante :

$$\Delta(A_n, A_n) \geq \left(\frac{f(n) - f(1)}{Mf(n)^\alpha} \right)^2 \frac{1}{2f(n)} \sim M' f(n)^{1-2\alpha}$$

Pour un certain $M' > 0$. Or, $f(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ et puisque $1 - 2\alpha > 0$ on en tire que $\Delta(A_n, A_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ et donc (L_n) diverge également. Donc A est à représentations infinies. $\square$

- (2) C'est la fameuse minoration de Tchebychev. Soit π la fonction de comptage associée à l'ensemble des nombres premiers $\mathcal{P}$. Alors il existe une constante $C > 0$ vérifiant pour tout $n \geq 2$:

$$C \frac{n}{\ln(n)} \leq \pi(n)$$

Pour le montrer, on va étudier la valuation p -adique du coefficient binomial $\binom{2n}{n}$ à p premier fixé. Remarquons déjà que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor \in \{0, 1\}$. En utilisant la formule de Legendre :

$$v_p \left(\binom{2n}{n} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \right)$$

Or, les termes de cette somme sont nuls dès que $2n/p^k < 1$; c'est-à-dire dès que $\log_p(2n) < k$. Prenons alors $k_{max} = \lceil \log_p(2n) \rceil$. Avec la remarque précédente, on a alors le constat :

$$v_p \left(\binom{2n}{n} \right) \leq \sum_{k=1}^{k_{max}} 1 = k_{max}$$

Donc pour tout p premier, $p^{v_p(\binom{2n}{n})} \leq 2n$. On a donc :

$$\binom{2n}{n} \leq (2n)^{\pi(n)}$$

Or, on a également :

$$4^n = (1+1)^{2n} = \sum_{k=0}^n \binom{2n}{k} \leq (2n+1) \binom{2n}{n}$$

Ainsi, on obtient la minoration suivante pour $\pi(n)$:

$$\ln \left(\frac{4^n}{2n+1} \right) \leq \pi(n) \ln(2n) \iff \frac{n \ln(4)}{\ln(2n)} - \frac{\ln(2n+1)}{\ln(2n)} \leq \pi(n)$$

Ce qui est suffisant pour conclure. □

- (3) On utilise encore le lemme de comptage, cette fois-ci à l'ensemble $\mathcal{P}_n = \{p \in \mathcal{P}, p \leq n\}$. On a alors :

$$\frac{\pi(n)^2}{2n} \leq \Lambda_n$$

Avec Λ_n la quantité analogue à celle du lemme montré dans la question 1. Or, avec la minoration de Tchebychev, $\pi(n)^2/n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$, d'où le résultat. □

Exercice 3 [ENS]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- (1) Montrer que tout sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est conjugué à un sous-groupe de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
- (2) En déduire que tout sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ est soit cyclique, soit diédral.

Corrigé proposé par J.J.T :

- (1) Pour montrer le résultat, il suffit de considérer le lemme suivant :

Lemme : On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$. Alors il existe un produit scalaire $[\cdot, \cdot]$ tel que les éléments de G soient des isométries pour ce produit scalaire.

Preuve : Il suffit de moyenniser ; pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, on pose :

$$[u, v] \triangleq \sum_{g \in G} \langle g(u), g(v) \rangle$$

$[\cdot, \cdot]$ est clairement bilinéaire, symétrique et défini positif car $\langle \cdot, \cdot \rangle$ l'est (vérifiez-le!), et puisque pour $f \in G$, $g \mapsto g \circ f$ est une bijection, les éléments de G sont des isométries pour ce produit scalaire.

Pour montrer le résultat souhaité, il suffit donc de considérer la base canonique $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ et une base orthonormale $(g_1, \dots, g_n)$ pour le produit scalaire $[\cdot, \cdot]$. Alors $\phi \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, la matrice de passage de la base canonique à la base $(g_1, \dots, g_n)$, est un automorphisme qui conjugue G à un sous-groupe de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, d'où le résultat.

- (2) Soit G un sous-groupe fini de $\text{GL}_2(\mathbb{R})$. Quitte à conjuguer par le bon élément, on peut traiter G comme un sous-groupe fini de $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$. Si $G \subset \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$, puisque ce dernier est isomorphe à $\mathbb{U}$, on en déduit que G peut être identifié à un sous-groupe fini de $\mathbb{U}$, c'est-à-dire cyclique. Si on suppose que G n'est pas inclus dans $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$, grâce au premier théorème d'isomorphisme, $H = G \cap \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ est d'indice 2 dans G et donc G est engendré par $H \cup \{s\}$ pour n'importe quel $s \in G \setminus H$; G est donc diédral, puisque H est cyclique. En particulier, G est engendré par deux éléments !

Exercice 4 [X]

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\tau(n)$ le nombre de diviseurs de n .

- (1) Montrer que $\sigma(n) = \sum_{k=1}^n \tau(k)$ vérifie $\sigma(n) \sim n \ln(n)$.

- (2) Montrer que :

$$\sigma(n) = n \ln(n) + (2\gamma - 1)n + \mathcal{O}(\sqrt{n})$$

Avec γ la constante d'Euler-Mascheroni.

Corrigé proposé par J.J.T

- (1) On peut réécrire la somme de la manière suivante :

$$\sigma(n) = \sum_{k=1}^n \sum_{d|k} 1 = \sum_{d=1}^n \sum_{d|k} 1 = \sum_{d=1}^n \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor$$

Or, $\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor = \frac{n}{d} + \mathcal{O}(1)$. On en tire en sommant que :

$$\sigma(n) = n \sum_{d=1}^n \frac{1}{d} + \mathcal{O}(n)$$

Avec une comparaison série-intégrale tout à fait classique, $\sum_{d=1}^n \frac{1}{d} = \ln(n) + \gamma + o(1)$, d'où le résultat. □

(2) On va d'abord montrer un lemme classique : Soit $(f, g) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ et $x \geq 1$. Alors pour tout $1 \leq y \leq x$:

$$\sum_{md \leq x} f(m)g(d) = \sum_{d \leq y} F\left(\frac{x}{d}\right) g(d) + \sum_{m \leq x/y} f(m)G\left(\frac{x}{m}\right) - F\left(\frac{x}{y}\right) G(y)$$

Preuve : Il suffit de l'écrire :

$$\sum_{md \leq x} f(m)g(d) = \sum_{\substack{md \leq x \\ d \leq y}} f(m)g(d) + \sum_{\substack{md \leq x \\ d > y}} f(m)g(d)$$

Remarquons que la première somme vaut simplement $\sum_{d \leq y} g(d)F\left(\frac{x}{d}\right)$ en factorisant à chaque fois par $g(d)$ à l'intérieur de la somme. Pour la somme à droite, on factorise par $f(m)$ afin de trouver :

$$\sum_{\substack{md \leq x \\ d > y}} f(m)g(d) = \sum_{m \leq x/y} f(m) \left(G\left(\frac{x}{m}\right) - G(y) \right)$$

Et le résultat s'ensuit en développant. Appliquons cette méthode à notre cas, en prenant $f = g = 1$ et $y = \sqrt{x}$:

$$\sum_{n \leq x} \tau(n) = 2 \sum_{n \leq \sqrt{x}} \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor - \lfloor \sqrt{x} \rfloor^2 =_{+\infty} 2x \sum_{n \leq \sqrt{x}} \frac{1}{n} - x + \mathcal{O}(\sqrt{x})$$

Or, $\sum_{n \leq \sqrt{x}} \frac{1}{n} =_{+\infty} \frac{1}{2} \ln(x) + \gamma + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ et le résultat s'ensuit.

Exercice 5 [X]

On pose $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_{\infty}$ et $\phi : E \rightarrow E$ l'application :

$$\phi : f \mapsto \left[x \mapsto f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) \right]$$

Finalement, on pose pour tout $x \in]0, 1[$, $\alpha(x) = \frac{\pi^2}{\sin(\pi x)^2}$ et $\beta(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(x-n)^2}$.

(1) Montrer que β est bien définie et que $\alpha - \beta$ se prolonge en élément de E . Montrer que ϕ est un endomorphisme continu et calculer $\|\phi\|_{op}$.

(2) En déduire que $\alpha = \beta$ sur $]0, 1[$ et la valeur de $\zeta(2)$, où $\zeta :]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est définie par :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Corrigé proposé par J.J.T :

(1) Pour traiter cette question, nous devons d'abord justifier que β est bien définie. Vérifier la convergence revient ici à vérifier la convergence absolue ; il nous faut donc vérifier que, pour tout $x \in]0, 1[$:

$$\left(\frac{1}{(x-n)^2} \right)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N}) \text{ et } \left(\frac{1}{(x+n)^2} \right)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \ell^1(\mathbb{N}^*)$$

C'est bien le cas, car chaque terme est équivalent, au voisinage de l'infini, à une série de Riemann de paramètre 2. La convergence est en fait uniforme sur tout voisinage de n'importe quel point $a \in]0, 1[$. En effet, par convergence normale : soit $I = [b, 1[$ où $0 < b < a$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{1}{(x-n)^2} \right\|_{I,\infty} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\| \frac{1}{(x+n)^2} \right\|_{I,\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(b-n)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(b+n)^2}$$

Ce qui converge. Ainsi, β est continue sur $]0, 1[$. Remarquons maintenant que pour tout $x \in]0, 1[$, $\alpha(1-x) = \alpha(x)$ et $\beta(1-x) = \beta(x)$. De ce fait, il nous suffit d'étudier le voisinage de 0^+ pour obtenir un développement asymptotique autour de 1^- et de 0. En examinant α d'abord :

$$\begin{aligned} \alpha(x) &=_0 \pi^2 \left(\pi x - \frac{\pi^3 x^3}{6} + o(x^3) \right)^{-2} =_0 \frac{1}{x^2} \left(1 + \frac{\pi^2 x^2}{3} + o(x^2) \right) \\ &= \frac{1}{x^2} + \frac{\pi^2}{3} + o(1) \end{aligned}$$

Pour β , on obtient :

$$\beta(x) =_0 \frac{1}{x^2} + M + o(1)$$

Avec $M \in \mathbb{R}$. Pour déterminer $\|\phi\|_{op}$, $\phi \in \mathcal{L}(E)$ de manière triviale et par une inégalité triangulaire on a immédiatement :

$$\|\phi(f)\|_{\infty} \leq 2\|f\|_{\infty}$$

Ainsi $\phi \in \mathcal{L}_c(E)$ (l'espace des endomorphismes continus) et, en prenant pour f une fonction constante non nulle, on constate que $\|\phi\|_{op} = 2$. $\square$

(2) Soit $x \in]0, 1[$, par un calcul direct :

$$\phi(\alpha - \beta)(x) = 4(\alpha - \beta)(x)$$

Puisque, par calcul direct, $\phi(\alpha)(x) = 4\alpha(x)$ et $\phi(\beta)(x) = 4\beta(x)$. Par continuité de $\alpha - \beta$ sur $[0, 1]$, le résultat reste vrai sur $[0, 1]$. Or, $4 > 2 = \|\phi\|_{op}$, ce qui implique que pour tout $x \in [0, 1]$, $\alpha - \beta = 0$. Par conséquent :

$$\forall x \in]0, 1[, \frac{\pi^2}{\sin(\pi x)^2} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(x-n)^2}$$

De plus, la convergence est uniforme. On peut donc en déduire la valeur de $\zeta(2)$ en posant $x = \frac{1}{2}$:

$$\pi^2 = 4 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(2n-1)^2} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

D'où l'équation suivante pour $\zeta(2)$:

$$\zeta(2) = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{\pi^2}{8} \iff \frac{3}{4} \zeta(2) = \frac{\pi^2}{8} \iff \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

$\square$

Exercice 6 [ENS]

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $n \geq 3$.

- (1) Décrire l'ensemble $\Omega = \{(u, v, w) \in E^3, u, v, w \text{ sont libres.}\}$.
- (2) Trouver la frontière de $\text{SL}(E)$.

Corrigé proposé par J.J.T :

- (1) Montrons que Ω n'est ni borné, ni fermé. Soit $(u, v, w) \in \Omega$. Alors $\omega_n = \frac{1}{n}(u, v, w) \in \Omega$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, mais la limite de ce dernier est $(0, 0, 0) \notin \Omega$. Donc Ω n'est pas fermé. Pour montrer qu'il n'est pas borné, on prend $(u, v, w) \in \Omega$ et on considère $\tilde{\omega}_n = n(u, v, w) \in \Omega$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il est alors clair que $(\|\tilde{\omega}_n\|)$ diverge lorsque n tend vers l'infini. On se demande alors si Ω est ouvert.

Le cas $n = 3$ nous met la puce à l'oreille ; en effet, on peut alors identifier Ω à $\text{GL}(E)$ par un isomorphisme canonique qui associe le triplet (u, v, w) à la matrice dont ses colonnes sont u, v et w . Dans ce cas-là $\Omega = \det^{-1}(\mathbb{K}^*)$ et donc ouvert car $\mathbb{K}^*$ l'est et le déterminant est continu.

Traisons désormais le cas général. Supposons que Ω ne soit pas ouvert. Il existe donc un élément $(u, v, w) \in \Omega$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un triplet $(u_n, v_n, w_n) \in B((u, v, w), 1/n) \setminus \Omega$, où ici la boule est prise pour la norme produit. Ainsi, à chaque rang $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un triplet $(\lambda_u(n), \lambda_v(n), \lambda_w(n)) \in \mathbb{K}^3 \setminus \{0, 0, 0\}$ vérifiant :

$$\lambda_u(n)u_n + \lambda_v(n)v_n + \lambda_w(n)w_n = 0$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $\Lambda_n = \max(\lambda_u(n), \lambda_v(n), \lambda_w(n)) \neq 0$. En divisant la relation juste au-dessus par Λ_n , on trouve de nouveaux coefficients $(\tilde{\lambda}_u(n), \tilde{\lambda}_v(n), \tilde{\lambda}_w(n)) \in \mathbb{K}^3 \setminus \{0, 0, 0\}$ tels que la relation au-dessus reste vraie, et on a surtout $(\tilde{\lambda}_u(n), \tilde{\lambda}_v(n), \tilde{\lambda}_w(n)) \in \mathcal{S}_\infty(0, 1)$, la sphère unité pour la norme infinie dans $\mathbb{K}^3$. C'est un fermé borné en dimension finie, donc compact ; il existe $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $((\tilde{\lambda}_u(\varphi(n)), \tilde{\lambda}_v(\varphi(n)), \tilde{\lambda}_w(\varphi(n))))$ tend vers $(\tilde{\lambda}_u, \tilde{\lambda}_v, \tilde{\lambda}_w) \in \mathcal{S}_\infty(0, 1)$. On a alors :

$$\tilde{\lambda}_u(\varphi(n))u_{\varphi(n)} + \tilde{\lambda}_v(\varphi(n))v_{\varphi(n)} + \tilde{\lambda}_w(\varphi(n))w_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \tilde{\lambda}_u u + \tilde{\lambda}_v v + \tilde{\lambda}_w w = 0$$

Ce qui est absurde puisque $(u, v, w) \in \Omega$. Donc Ω est ouvert. □

- (2) On identifie $\text{SL}(E) \cong \text{SL}_n(\mathbb{K})$. Il est clair que $\text{SL}_n(\mathbb{K}) = \det^{-1}(\{1\})$ donc est fermé, étant l'image réciproque d'un fermé par une application continue. Montrons qu'il est d'intérieur vide. Supposons qu'il soit d'intérieur non vide, et soit A dans son intérieur. Il existe donc un rayon $r > 0$ tel que $B(A, r) \subset \text{SL}_n(\mathbb{K})$. On a alors $(1+t)A \in \text{SL}_n(\mathbb{K})$ pour $|t| < r/\|A\|$, et en composant par le déterminant on trouve que $\det((1+t)A) = 1$ quel que soit $|t| < r/\|A\|$. Or, $\det((1+t)A) = (1+t)^n \det(A) = (1+t)^n$, ce qui est absurde. $\text{SL}_n(\mathbb{K})$ est donc sa propre frontière. □

Exercice 7 [ENS]

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant et $E \subset \mathbb{C}$ fini non vide. Montrer que $|P^{-1}(E)| \geq (|E| - 1) \deg(P) + 1$.

Corrigé proposé par J.J.T :

Montrons d'abord le lemme suivant, qui s'avère être incroyablement utile :

Lemme : Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geq 1$. Alors le nombre de racines distinctes de P , que l'on note ℓ , est donné par :

$$\ell = n - \deg(P \wedge P')$$

C'est un résultat assez intuitif. En effet, notons $P = \alpha \prod_{\lambda \in Z_{\mathbb{C}}(P)} (X - \lambda)^{m(\lambda)}$ avec $Z_{\mathbb{C}}(P)$ l'ensemble des racines complexes de P et $m(\lambda)$ la multiplicité. Alors les racines de $P \wedge P'$ sont exactement celles de P qui sont de multiplicité ≥ 2 , et elles admettent une multiplicité $m(\lambda) - 1$ dans $P \wedge P'$, d'où le résultat.

Revenons à l'exercice. On note $E = \{z_1, \dots, z_C\}$ avec $C = |E|$. Alors :

$$|P^{-1}(E)| = \left| \prod_{k=1}^C P^{-1}(\{z_k\}) \right|$$

Avec ici l'union étant disjointe. Or, pour chaque $1 \leq k \leq C$, d'après le lemme $|P^{-1}(\{z_k\})| = n - \deg(P - z_k \wedge P')$. De ce fait :

$$|P^{-1}(E)| = \sum_{k=1}^C n - \deg(P - z_k \wedge P') = nC - \sum_{k=1}^C \deg(P - z_k \wedge P')$$

Or, la famille $(P - z_k)_{1 \leq k \leq C}$ est une famille de polynômes premiers entre eux. Il s'ensuit que la famille $(P - z_k \wedge P')_{1 \leq k \leq n}$ l'est aussi, et puisqu'ils divisent tous P' également :

$$\sum_{k=1}^C \deg(P - z_k \wedge P') = \deg \left(\prod_{k=1}^C (P - z_k \wedge P') \right) \leq \deg(P') = n - 1$$

D'où le résultat. □

Exercice 8 [X/ENS]

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n , positif sur $\mathbb{R}$. Montrer que $P + P' + \dots + P^{(n)} \geq 0$ sur $\mathbb{R}$.

Corrigé proposé par J.J.T :

Montrons d'abord le lemme suivant qui nous permettra de conclure de façon assez immédiate.

Lemme : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} +\infty$. Alors f admet un minimum global sur $\mathbb{R}$.

C'est extrêmement classique et il faut impérativement savoir le démontrer. Soit $A > f(0)$. Alors il existe un $R > 0$ tel que pour tout $|x| > R$, $f(x) > A$. On réduit alors notre étude au compact $[-R, R]$. La fonction f étant continue sur ce dernier, elle admet un minimum en un certain $\alpha \in [-R, R]$. En combinant les assertions précédentes, on obtient, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(\alpha) \leq f(x)$ (le minimum est donc global).

On reprend les notations de l'énoncé et on pose $Q = P + P' + \dots + P^{(n)}$. Pour que P vérifie les hypothèses de l'énoncé, il est nécessaire que P soit de degré pair ; il en résulte que Q est également de degré pair. Le cas P constant est trivial. Supposons donc que P est de degré pair supérieur ou égal à 2. Alors P vérifie les hypothèses du lemme et Q aussi. Ainsi, Q admet un minimum global en un $\alpha \in \mathbb{R}$. Puisque $Q' = Q - P$ (car $P^{(n+1)} = [0]$), on a en ce point :

$$Q'(\alpha) = Q(\alpha) - P(\alpha) = 0$$

Donc $Q(\alpha) = P(\alpha) \geq 0$ et puisque Q atteint son minimum global en α on en déduit qu'il est toujours positif. □

Exercice 9 [X]

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n \geq 2$. Montrer que les racines de P' sont contenues dans l'enveloppe convexe des racines de P .

Corrigé proposé par J.J.T :

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. P est scindé dans $\mathbb{C}$ et on note :

$$P = \lambda \prod_{i=1}^n (X - \alpha_i)^{m_i}$$

On utilise alors la formule de Gauss-Lucas de la dérivée logarithmique de P :

$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{X - \alpha_i}$$

Si α_k est une racine double de P , c'est-à-dire s'il s'agit aussi d'une racine de P' , elle appartient immédiatement à $\text{Conv}(Z_{\mathbb{C}}(P))$. On s'intéresse donc aux racines de P' n'étant pas des racines de P , donc des racines de P'/P . On en considère une notée $r \in \mathbb{C}$. On a donc :

$$\frac{P'}{P}(r) = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{r - \alpha_i} = \sum_{i=1}^n m_i \frac{\bar{r}_i - \bar{\alpha}_i}{|r - \alpha_i|} = 0$$

On obtient donc :

$$\sum_{i=1}^n \frac{m_i}{|r - \alpha_i|} \bar{r} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{|r - \alpha_i|} \bar{\alpha}_i \iff r = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{|r - \alpha_i| M} \alpha_i$$

Où l'on a pris le conjugué et noté :

$$M = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{|r - \alpha_i|}$$

Il est évident qu'il s'agit d'une combinaison convexe pondérée par les α_k donc, d'après ce qui précède, on a bien $r \in \text{Conv}(Z_{\mathbb{C}}(P))$.

Exercice 10 [ENS]

Soient $e_1, \dots, e_n$ des vecteurs d'un espace euclidien E tels que $\langle e_i | e_j \rangle \leq 0$ pour tout i, j distincts dans $\llbracket 1, n \rrbracket$. Montrer que $(e_1, \dots, e_n)$ est libre si et seulement s'il existe une forme linéaire f sur E telle que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, f(e_i) > 0$.

Corrigé proposé par J.J.T :

Supposons qu'il existe f une forme linéaire sur E telle que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, f(e_i) > 0$, et supposons qu'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0, \dots, 0\}$ tel que :

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0_E$$

En notant $\Lambda^+ = \{i \in \llbracket 1, n \rrbracket | \lambda_i \geq 0\}$ et $\Lambda^- = \{i \in \llbracket 1, n \rrbracket | \lambda_i \leq 0\}$, non vides par hypothèse, on peut écrire :

$$\sum_{i \in \Lambda^+} \lambda_i e_i = - \sum_{j \in \Lambda^-} \lambda_j e_j$$

Ainsi, en prenant le produit scalaire on obtient :

$$0 \leq \left\langle \sum_{i \in \Lambda^+} \lambda_i e_i \mid - \sum_{j \in \Lambda^-} \lambda_j e_j \right\rangle = - \sum_{i \in \Lambda^+} \sum_{j \in \Lambda^-} \lambda_i \lambda_j \langle e_i \mid e_j \rangle \leq 0$$

Car pour tout $(i, j) \in \Lambda^+ \times \Lambda^-$, $\langle e_i \mid e_j \rangle \leq 0$ et $-\lambda_i \lambda_j \geq 0$ (notons que si on a $i \in \Lambda^+ \cap \Lambda^-$ le terme conséquent n'a pas d'influence sur le signe de la somme, car $\lambda_i = 0$). Ainsi, on a :

$$\sum_{i \in \Lambda^+} \lambda_i e_i = 0_E$$

Or en appliquant f , on obtient :

$$\sum_{i \in \Lambda^+} \lambda_i f(e_i) > 0$$

Ce qui est absurde puisque $f(0_E) = 0$. Donc pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\lambda_i = 0$. Donc la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre.

Réciproquement, supposons que $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille libre. Quitte à raisonner sur $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ on peut restreindre notre étude à $\mathcal{L}(G, \mathbb{R})$ avec $G = \text{vect}_{\mathbb{R}}(e_1, \dots, e_n)$ et prenons comme base $B = (e_1, \dots, e_n)$ de G , afin de simplifier la tâche. D'après le théorème de Riesz, pour tout $f \in \mathcal{L}(G, \mathbb{R})$ il existe un unique vecteur $a \in G$ tel que f s'écrit comme le produit scalaire $\langle a \mid \cdot \rangle$. On souhaite alors montrer qu'il existe $a \in G$ tel que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\langle a \mid e_i \rangle > 0$. Pour ce faire, posons :

$$M = (\langle e_i \mid e_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq n}$$

On souhaite alors résoudre le système :

$$MA = M \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}$$

Avec A la matrice associée à a dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ et pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\gamma_i > 0$. En effet, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$[MA]_{i,1} = \sum_{j=1}^n [M]_{i,j} a_j = \sum_{j=1}^n a_j \langle e_i \mid e_j \rangle = \langle a \mid e_i \rangle$$

On souhaite alors montrer que $M \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$. Pour ce faire, on montre que $0 \notin \text{Sp}_{\mathbb{R}}(M)$. Soit $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et X la matrice colonne associée à x dans la base $(e_1, \dots, e_n)$. Alors :

$$MX = O_{n,1} \iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \langle x \mid e_i \rangle = 0$$

Ainsi, on a :

$$\langle x \mid x \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \langle x \mid e_i \rangle = 0$$

Donc $x = 0_G$, et donc $\ker M = \{0\}$, donc $M \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, ce qui nous permet de conclure. $\square$

Exercice 11 [X]

Soit $n \geq 2$. On pose :

$$g_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^{4k}} \binom{2k}{k}^2$$

Soit K_n l'élément de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} \underset{x \rightarrow 0}{=} K_n(x) + o(x_n)$$

(1) Montrer l'égalité :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |K_n(e^{i\theta})|^2 d\theta = g_n$$

(2) Soit $\sum a_k z^k$ une série entière de rayon de convergence supérieur ou égal à 1, de somme $f(z)$. On suppose que, pour tout $|z| < 1$, $|f(z)| \leq 1$. Montrer que :

$$\left| \sum_{k=0}^n a_k \right| \leq g_n$$

Corrigé proposé par J.J.T :

(1) Explicitons K_n . D'après la formule du binôme généralisé, on a pour tout $|z| < 1$:

$$(1-z)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)\dots(-\frac{1}{2}-k+1)}{k!} (-z)^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{2^k k!} \prod_{i=0}^{k-1} (2i+1)$$

Or, on a :

$$\prod_{i=1}^{k-1} (2i+1) = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{(2i+1)(2i+2)}{(2i+2)} = \frac{(2k)!}{2^k k!}$$

Et de ce fait, on identifie K_n :

$$K_n(X) = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{(2k)!}{2^{2k} (k!)^2} X^k = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^{2k}} \binom{2k}{k} X^k = \sum_{k=0}^n b_k X^k$$

Il suffit ainsi de remarquer que $|K_n(e^{i\theta})|^2 = K_n(e^{i\theta}) \overline{K_n(e^{i\theta})}$ pour pouvoir conclure :

$$|K_n(e^{i\theta})|^2 = \sum_{k=0}^n \sum_{h=0}^n b_h b_k e^{i\theta(k-h)} = g_n + \sum_{(k,h) \in \llbracket 0,n \rrbracket^2, k \neq h} b_h b_k e^{i\theta(k-h)}$$

Or, si $k \neq h$:

$$\int_0^{2\pi} e^{i\theta(k-h)} d\theta = \left[\frac{e^{i\theta(k-h)}}{i(k-h)} \right]_0^{2\pi} = 0$$

D'où par linéarité de l'intégrale sur un nombre fini de termes :

$$\int_0^{2\pi} |K_n(e^{i\theta})|^2 d\theta = 2\pi g_n$$

Ce qui est équivalent à ce que l'on voulait montrer. □

(2) Prenons $|z| < 1$. Alors l'expression suivante a un sens :

$$\frac{f(z)}{1-z} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k \right) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \left(\sum_{k=0}^n a_k \right)$$

Par absolue convergence et produit de Cauchy. De ce fait, pour tout $n \geq 2$, $\theta \in [0, 2\pi[$ et $0 < r < 1$:

$$\frac{f(re^{i\theta})}{1-re^{i\theta}} e^{-in\theta} = \sum_{k=0}^n a_k + \sum_{k \neq n} r e^{i\theta k} \left(\sum_{i=0}^k a_i \right)$$

Par le même principe d'isolement de coefficient on obtient alors :

$$\frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{1-re^{i\theta}} e^{-in\theta} d\theta \right| = \left| \sum_{k=0}^n a_k \right|$$

Or :

$$\frac{f(re^{i\theta})}{1-re^{i\theta}} = f(re^{i\theta})(K_n(re^{i\theta}) + \sum_{k=n+1}^{\infty} g_k r^k e^{ik\theta})^2 = \frac{f(re^{i\theta})}{1-re^{i\theta}} = f(re^{i\theta})K_n(re^{i\theta})^2 + \mathcal{O}(r^n)$$

Ainsi, par inégalité triangulaire et du fait que le terme en $\mathcal{O}(r^n)$ disparaît lorsqu'on l'intègre, on se retrouve avec :

$$\left| \sum_{k=0}^n a_k \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})K_n(re^{i\theta})^2| d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |K_n(re^{i\theta})|^2 d\theta = r^{2n} g_n$$

Car $|f(re^{i\theta})| \leq 1$. Ceci étant vrai pour tout $r < 1$, par passage à la limite on obtient ce que l'on voulait.

Exercice 12 [ENS]

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(0) \neq 0$, $r \in \mathbb{R}^{+*}$ et $z_1, \dots, z_n$ les racines de module strictement inférieur à r de P , comptées avec leur multiplicité. Montrer que :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log(|P(re^{i\theta})|) d\theta = \log(|P(0)|) + \sum_{k=1}^n \log\left(\left|\frac{r}{z_i}\right|\right)$$

Corrigé proposé par J.J.T :

Les techniques classiques du calcul intégral ne marchant pas ici (si l'on décide d'omettre la théorie d'analyse complexe), il est judicieux de passer par un calcul direct avec les sommes de Riemann. Remarquons tout d'abord que :

$$I(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log(|P(re^{i\theta})|) d\theta - \log(|P(0)|) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log(|P(re^{i\theta})|) - \log(|P(0)|) d\theta$$

Que l'on peut écrire sous forme factorisée d'après le théorème d'Alembert-Gauss :

$$I(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log\left(\prod_{i=1}^n \left|\frac{z_i - re^{i\theta}}{z_i}\right|\right) d\theta = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n \int_{-\pi}^{\pi} \log\left(\left|1 - \frac{re^{i\theta}}{z_i}\right|\right) d\theta$$

En écrivant pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ $z_i = |z_i|e^{i\theta_i}$, on en déduit :

$$I(r) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n I(j)$$

Avec pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$I(j) = \int_{-\pi}^{\pi} \log \left(\left| 1 - \frac{re^{i\theta}}{|z_j|e^{i\theta_j}} \right| \right) d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \log(|1 - r_j e^{i(\theta-\theta_j)}|) d\theta$$

Où $r_j = \frac{r}{|z_j|} > 1$ par hypothèse. L'intégrande étant 2π -périodique et pair, on en tire :

$$2I(j) = \int_{-\pi}^{\pi} \log(r_j^2 - 2r_j \cos(\theta) + 1) d\theta = 2 \int_0^{\pi} \log(r_j^2 - 2r_j \cos(\theta) + 1) d\theta$$

D'où l'on en conclut que :

$$I(j) = \int_0^{\pi} \log(r_j^2 - 2r_j \cos(\theta) + 1) d\theta$$

L'application étant continue sur le segment $[0, \pi]$ on peut appliquer une somme de Riemann avec une subdivision régulière :

$$I(j) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \log \left(\prod_{k=1}^n (r_j^2 - 2r_j \cos(\frac{\pi k}{n}) + 1) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \log \left(\prod_{k=1}^n (r_j - \omega_{n,k})(r_j - \omega_{n,-k}) \right)$$

Avec pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\omega_{n,k} = \exp(\frac{\pi i k}{n})$. De ce fait, on remarque que le produit qui nous est soumis est *très* proche de la factorisation du polynôme :

$$P(X) = X^{2n} - 1 = \prod_{k=0}^n (X - \omega_{n,k}) \times \prod_{k=-1}^{-n+1} (X - \omega_{n,k}) = \frac{X - \omega_{n,0}}{X - \omega_{n,n}} \prod_{k=1}^n (X - \omega_{n,k})(X - \omega_{n,-k})$$

Et donc :

$$I(j) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \log \left(\frac{r_j - 1}{r_j + 1} (r_j^{2n} - 1) \right) = 2\pi \log(r_j)$$

Et de ce fait, on arrive à conclure :

$$I(r) = \sum_{k=1}^n \log \left(\frac{r_j}{|z_j|} \right)$$

Ce qui est équivalent à ce que l'on voulait démontrer. □

Exercice 13 [ENS]

Soit G un groupe non abélien fini. Montrer que la probabilité que deux éléments de G commutent est majorée par $5/8$. Est-ce que cette borne est optimale ?

Corrigé proposé par J.J.T :

C'est un grand classique des exercices à l'oral. Il faut bien poser le problème pour songer à y répondre. On pose $\mathcal{Z}(G)$ le centre de G , c'est-à-dire l'ensemble des éléments de G qui commutent avec G tout entier, et pour tout $x \notin \mathcal{Z}(G)$, $\mathcal{C}(x) = \{g \in G, gx = xg\}$ le commutant de x . L'assertion « G non abélien » est équivalente à $\mathcal{Z}(G) \neq G$. On vérifie que ce sont deux sous-groupes de G . De ce fait, notons que d'après Lagrange, on a :

$$|\mathcal{C}(x)| \leq \frac{|G|}{2}$$

Pour tout $x \notin \mathcal{Z}(G)$. De plus, en considérant $x \notin \mathcal{Z}(G)$, $\mathcal{Z}(G)$ est un sous-groupe de $\mathcal{C}(x)$ et donc :

$$|\mathcal{Z}(G)| \leq \frac{|G|}{4}$$

Notre problème se résume donc au calcul suivant : pour deux variables aléatoires X, Y à valeurs dans G suivant toutes deux une loi uniforme et indépendante :

$$P(XY = YX) = \frac{|\{(x, y) \in G^2, xy = yx\}|}{|G|^2} = \frac{|A|}{|G|^2}$$

On va chercher à majorer le numérateur, et on va donc faire du dénombrement. On va fixer x d'abord dans les couples $(x, y) \in A$ et distinguer les cas $x \in \mathcal{Z}(G)$ et $x \notin \mathcal{Z}(G)$.

- Si $x \in \mathcal{Z}(G)$, alors tous les éléments commutent avec x . Il s'ensuit que si $x \in \mathcal{Z}(G)$, $(x, y) \in A$ pour tout $y \in G$: donc pour chaque $x \in \mathcal{Z}(G)$, on a $|G|$ couples qui marchent bien.
- Si $x \notin \mathcal{Z}(G)$ alors les éléments qui commutent avec x sont exactement les éléments de $\mathcal{C}(x)$. On a donc pour $x \notin \mathcal{Z}(G)$, $|\mathcal{C}(x)|$ couples qui sont dans A .

Résumons cela avec un calcul :

$$|A| = \sum_{(x,y) \in G^2} \mathbb{1}_A(x, y) = \sum_{x \in \mathcal{Z}(G)} \sum_{y \in G} \mathbb{1}_A(x, y) + \sum_{x \notin \mathcal{Z}(G)} \sum_{y \in G} \mathbb{1}_A(x, y) = |\mathcal{Z}(G)| \times |G| + \sum_{x \notin \mathcal{Z}(G)} |\mathcal{C}(x)|$$

Il y a $|G| - |\mathcal{Z}(G)|$ éléments dans cette dernière somme, et tous les termes sont majorés par $|G|/2$. On en déduit :

$$P(XY = YX) \leq \frac{|\mathcal{Z}(G)|}{|G|} + \frac{|G| - |\mathcal{Z}(G)|}{2|G|} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$$

D'où le résultat. On remarquera que cette borne est optimale car elle est atteinte par le groupe diédral d'ordre 8. $\square$

Exercice 14 [ENS]

- (1) Existe-t-il une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ injective et continue ?
- (2) Existe-t-il une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ surjective, continue telle que $f^{-1}(\{0\})$ soit compact ?

Corrigé proposé par J.J.T :

- (1) C'est classique ; la réponse est non. En effet, supposons par l'absurde qu'un tel f existe. Alors $I = f(\{(\cos(\theta), \sin(\theta)), \theta \in [0, 2\pi]\})$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ car l'image d'un connexe par une fonction continue. Or, en ôtant un point bien choisi de $\{(\cos(\theta), \sin(\theta)), \theta \in [0, 2\pi[$, l'ensemble épointé reste connexe tandis que son image ne le reste pas par injectivité de f , ce qui est absurde car f est supposé aussi continu.
- (2) La réponse est encore non. Cette fois-ci, le raisonnement est moins classique et plus subtil. $f^{-1}(\{0\})$ étant un compact, il est contenu dans une boule fermée de rayon $R > 0$ que l'on notera B . Alors $\mathbb{R}^2 \setminus B$ est ouvert, connexe par arcs, et par continuité et surjectivité de f on en déduit que $f(\mathbb{R}^2 \setminus B)$ est de la forme $]a, +\infty[$ ou $]-\infty, a[$ avec $a > 0$. Mais on a supposé que f est surjective et continue. Donc $f(B)$ est à la fois compact, car f est continue, mais aussi non borné, puisque $f(\mathbb{R}^2) = f(\mathbb{R}^2 \setminus B) \cup f(B) = \mathbb{R}$, ce qui est absurde. Donc un tel f ne peut pas exister.

Exercice 15 [ENS]

Pour tout $r \geq 0$, on note $Q(r)$ le nombre de points entiers à l'intérieur du cercle centré en 0 et de rayon r dans $\mathbb{R}^2$:

$$Q(r) = \#\{(m, n) \in \mathbb{Z}^2, m^2 + n^2 \leq r^2\}$$

- (1) Trouver un équivalent simple de $Q(r)$ au voisinage de $+\infty$.
- (2) En déduire un équivalent de la série entière $\left(\sum_{n \geq 0} x^{n^2}\right)$ au voisinage de 1.

Corrigé proposé par J.J.T :

- (1) Intuitivement, $Q(r)$ devrait bien approcher l'aire du cercle de rayon r ... rendons cette intuition rigoureuse. Fixons un $r > 0$, et soit $1 \leq k \leq r$ un entier fixé que l'on repère avec le point $(k, 0)$. Sur la droite perpendiculaire à l'axe des abscisses qui passe par $(k, 0)$, on traverse forcément le cercle car $1 \leq k \leq r$.

Tous les points $(k, p) \in \mathbb{Z}^2$ qui appartiennent à cette droite et qui sont à l'intérieur du cercle vérifient $p^2 \leq r^2 - k^2$; puisque les p négatifs sont acceptés aussi, on en compte $1 + 2\lfloor \sqrt{r^2 - k^2} \rfloor$, avec le $+1$ venant du cas $p = 0$, que l'on ne veut pas compter deux fois. On en déduit que :

$$Q(r) = \sum_{k=-r}^r (1 + 2\lfloor \sqrt{r^2 - k^2} \rfloor) = 1 + 2r + 2 \sum_{k=1}^r (1 + 2\lfloor \sqrt{r^2 - k^2} \rfloor) = 4 \sum_{k=1}^r \sqrt{r^2 - k^2} + \mathcal{O}(r)$$

Or, on reconnaît l'expression d'une intégrale de Riemann de la fonction continue sur $[0, 1]$ $x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$:

$$\frac{1}{r} \sum_{k=1}^r \sqrt{1 - \frac{k^2}{r^2}} \underset{r \rightarrow +\infty}{=} \frac{\pi}{4} + o(1)$$

D'où l'estimation :

$$Q(r) \sim \pi r^2$$

□

- (2) Posons pour tout $|t| < 1$, $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^{n^2}$. Alors par produits de Cauchy, on obtient :

$$\frac{1}{1-t} f(t)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} Q^+(\sqrt{n}) t^n$$

Avec $Q^+(n) = \#\{(x, y) \in \mathbb{N}^2, x^2 + y^2 \leq n^2\}$ les points contenus dans le cercle résidant dans le premier quadrant de $\mathbb{R}^2$. Par un raisonnement analogue à la démonstration précédente, on trouve facilement que $Q^+(\sqrt{n}) \sim \frac{\pi}{4}n$. On va donc mobiliser le lemme classique suivant :

Lemme : Soit $(a_n), (b_n)$ deux suites positives dont les séries entières ont un rayon de convergence égal à 1, équivalentes au voisinage de l'infini et telles que la série des (a_n) diverge. Alors :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \underset{t \rightarrow 1^-}{\sim} \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$$

Preuve : Quitte à retrancher les sommes, on peut supposer que (a_n) et (b_n) sont strictement positives. Soit $\varepsilon > 0$. On note A et B les séries entières associées à (a_n) et (b_n) respectivement. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $|t| < 1$, on pose :

$$M_n = \sum_{k=0}^n a_k \text{ et } R_n(t) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k t^k$$

Il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|a_n - b_n| \leq \varepsilon a_n$. On en tire alors par l'inégalité triangulaire que :

$$|A(t) - B(t)| \leq M_N + \varepsilon R_N(t)$$

En divisant par $A(t)$, on obtient alors :

$$\left| \frac{B(t)}{A(t)} - 1 \right| \leq \varepsilon + o(1)$$

Par positivité de (a_n) , d'où le résultat en laissant tendre $t \rightarrow 1^-$. □

Il s'ensuit que :

$$\frac{f(t)^2}{1-t} \sim_{1^-} \frac{\pi}{4} \sum_{n=0}^{\infty} n t^n \sim_{1^-} \frac{\pi}{4(1-t)^2}$$

D'où le résultat. □

Exercice 15 [X/ENS]

Soit $(A, B) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer qu'on a l'inégalité :

$$\det(A+B)^{1/n} \geq \det(A)^{1/n} + \det(B)^{1/n}$$

Corrigé proposé par J.J.T :

On reprend les notations de l'exercice. Montrons d'abord un lemme classique qui va nous permettre de trivialisier l'exercice.

Lemme : Il existe un $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ et D une matrice diagonale à coefficients positifs tels que $A = PP^T$ et $B = PDP^T$.

Preuve : D'après le théorème spectral, A est diagonalisable dans une base orthonormée. On a donc $A = \Omega \tilde{D} \Omega^T$, avec $\tilde{D}$ une matrice diagonale à coefficients strictement positifs et $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Posons $P = \Omega \tilde{D}$.

On pose $C = P^{-1}B(P^T)^{-1}$. Alors C est une matrice symétrique, semblable à B , donc toujours dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Il existe une matrice diagonale à coefficients positifs D et une matrice $\Lambda \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tels que $C = \Lambda D \Lambda^T$. On en tire que $B = P \Lambda D \Lambda^T P^T$. On pose alors $Q = P \Lambda$. Alors $QQ^T = PP^T = A$ et $QDQ^T = B$, et $Q \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$. Le lemme est alors montré!

Revenons à l'exercice. On a l'existence de $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que $A = PP^T$ et $B = PDP^T$ avec $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, où pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\lambda_k \geq 0$. En utilisant le morphisme du déterminant et en divisant par $\det(Q^2)^{1/n}$, l'inégalité qu'il faut montrer est alors équivalente à :

$$\det(I_n + D)^{1/n} \geq 1 + \det(D)^{1/n} \iff \prod_{k=1}^n (1 + \lambda_k)^{1/n} \geq 1 + \prod_{k=1}^n \lambda_k^{1/n}$$

Or, c'est une simple inégalité de convexité. En effet, $x \mapsto \ln(1 + e^x)$ est convexe sur $\mathbb{R}$. On a alors, en notant $\lambda_i = e^{\mu_i}$ pour chaque $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\ln \left(\prod_{i=1}^n (1 + \lambda_i)^{1/n} \right) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \ln(1 + e^{\mu_i}) \geq \ln \left(1 + e^{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu_i} \right) \iff \prod_{k=1}^n (1 + \lambda_k)^{1/n} \geq 1 + \prod_{k=1}^n \lambda_k^{1/n}$$

D'où le résultat. □

Exercice 16 [ENS]

Soit E un espace vectoriel normé de dimension dénombrable. Montrer que E n'est pas complet.

Corrigé proposé par J.J.T :

C'est un exercice difficile de la rue d'Ulm si l'on n'a jamais vu le lemme de Baire. Montrons ce lemme :

Lemme : Si (X, δ) est un espace métrique complet, alors l'intersection dénombrable d'ouverts denses dans cet espace reste dense.

Preuve : Soit (O_n) une suite d'ouverts denses de (X, δ) , et notons $\Omega = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n$. Il s'agit de montrer que pour tout V ouvert de E , $V \cap \Omega \neq \emptyset$. Pour cela, on va créer une suite de Cauchy dont la limite appartient à $V \cap \Omega$. Pour ce faire, on construit une suite de boules fermées $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui respecte les conditions suivantes :

- (1) Le rayon de B_n est inférieur ou égal à 2^{-n} .
- (2) $B_0 \subset V \cap O_0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_{n+1} \subset \overset{\circ}{B}_n \cap O_{n+1}$.

Justifions que cette suite de boules est bien définie et existe réellement. O_0 est dense dans X , donc $V \cap O_0$ est non vide et ouvert en tant qu'intersection d'ouverts de X . Ainsi, soit $x_0 \in V \cap O_0$. Il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $B_f(x_0, \varepsilon_0) \subset O_0 \cap V$. Quitte à réduire ε_0 , on peut supposer $\varepsilon_0 \leq 1$. Supposons qu'on ait construit n boules fermées qui respectent les conditions (1) et (2) $(B_0, B_1, \dots, B_n)$. Alors, puisque O_{n+1} est dense dans X , $\overset{\circ}{B}_n \cap O_{n+1}$ est non vide et ouvert en tant qu'intersection d'ouverts de X . Ainsi, en prenant $x_{n+1} \in \overset{\circ}{B}_n \cap O_{n+1}$, il existe $\varepsilon_{n+1} > 0$ tel que $B_f(x_{n+1}, \varepsilon_{n+1}) \subset \overset{\circ}{B}_n \cap O_{n+1}$. Quitte à réduire ε_{n+1} , on peut supposer que $\varepsilon_{n+1} < \frac{1}{2^{n+1}}$, d'où l'existence de notre suite de boules fermées.

Supposons que (X, δ) soit complet. $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fermés décroissants dont le rayon tend vers 0. Par complétude de (X, δ) :

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n \neq \emptyset$$

Ainsi, il existe x tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \in B_n$. Mais puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n \subset V$ et $B_n \subset O_n$, on a :

$$V \cap \Omega \neq \emptyset$$

Et de ce fait Ω est dense dans X . Revenons à l'exercice ; en passant par le complémentaire, on se rend compte que le lemme de Baire admet une formulation différente :

Lemme : Soit (X, δ) un espace métrique complet, alors l'union dénombrable de fermés d'intérieur vide est également d'intérieur vide.

C'est surtout cette formulation qui va nous être utile. En effet, soit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base de E , et supposons que E soit complet pour sa norme notée $\|\cdot\|$. Alors (E, δ) est un espace métrique complet pour la distance $\delta(x, y) = \|x - y\|$ pour $(x, y) \in E^2$. Il en résulte que E vérifie le lemme de Baire. On pose alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n = \text{vect}(e_0, \dots, e_n)$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n \subset E$ est un sous-espace vectoriel strict de E , donc fermé, d'intérieur vide. Ainsi, d'après le lemme de Baire :

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n \text{ est d'intérieur vide}$$

Mais ce dernier est égal à E par hypothèse, d'où l'absurdité ; E ne peut donc pas être complet. □

Exercice 17 [X/ENS]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on note $\Delta(a, b)$ la matrice dont les coefficients diagonaux sont a , la sur et sous-diagonale valent b , et 0 ailleurs. Trouver les valeurs propres de $\Delta(a, b)$ en fonction de a et b .

Corrigé proposé par J.J.T :

On a $\Delta(a, b) = aI_n + bJ$, avec J la matrice qui a des 1 sur la sous et sur-diagonale, et des zéros ailleurs; on note $J = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. Il faut donc trouver les valeurs propres de J . Soit $\lambda \in \text{Sp}(J)$. Il existe un vecteur non nul $(x_1, \dots, x_n)^T = X \in \mathbb{R}^n$ tel que $JX = \lambda X$. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Alors :

$$[JX]_{i,1} = \lambda x_i \iff \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j = \lambda x_i$$

On note i_0 l'indice tel que $|x_{i_0}| > 0$ soit maximal. On a alors, en divisant par ce dernier :

$$|\lambda| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^n |a_{i,j}| = 2$$

On en tire que $\lambda = 2 \cos(\alpha)$ pour un certain $\alpha \in [0, 2\pi[$. En posant artificiellement $x_{n+1} = x_0 = 0$, on trouve le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \lambda x_1 = x_2 + x_0 \\ \lambda x_2 = x_1 + x_3 \\ \lambda x_3 = x_2 + x_4 \\ \vdots \\ \lambda x_{n-1} = x_{n-2} + x_n \\ \lambda x_n = x_{n-1} + x_{n+1} \end{cases}$$

On est donc amené à étudier la suite récurrente d'ordre deux définie pour tout $p \geq 0$ par $x_{p+2} - \lambda x_{p+1} + x_p = 0$. En remplaçant $\lambda = 2 \cos(\alpha)$, on se retrouve à étudier le polynôme caractéristique $P(X) = X^2 - 2 \cos(\alpha)X + 1 = (X - e^{i\alpha})(X - e^{-i\alpha})$.

Si $\alpha = 0$ ou $\alpha = \pi$ on a affaire à une racine double; ainsi, $x_p = A + Bk$ pour deux complexes A et B . Or, $x_0 = 0$ implique que $A = 0$, puis $x_{n+1} = 0$ implique que $B = 0$. Donc $\alpha \in]0, 2\pi[\setminus \{\pi\}$.

On en tire que $x_p = Ae^{i\alpha p} + Be^{-i\alpha p}$ pour un couple $(A, B) \in \mathbb{C}^2$. La condition $x_0 = 0$ impose $A = -B$. $x_{n+1} = 0$ impose que $1 = \exp(2i\alpha(n+1))$. On en tire que α est de la forme $\alpha = \pi k / (n+1)$, avec $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Or, on a déjà omis le cas $k = 0$. On a donc n valeurs propres deux à deux distinctes; ainsi, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:

$$\text{Sp}(\Delta(a, b)) = \left\{ a + 2b \cos\left(\frac{\pi k}{n+1}\right), k \in \llbracket 1, n \rrbracket \right\}$$

□

Exercice 18 [ENS]

On note d_n le nombre de diviseurs de $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $d_n = O(n^\varepsilon)$ pour tout $\varepsilon > 0$.

Corrigé proposé par J.J.T :

Soit $\varepsilon > 0$. On constate à l'aide de la formule de décomposition en facteurs premiers que pour tout $n \geq 2$:

$$n = \prod_{p|n} p^{v_p(n)}$$

On peut obtenir la formule explicite suivante de d_n :

$$d_n = \prod_{p|n} (v_p(n) + 1)$$

Avec $v_p(n)$ la valuation p -adique de n . Ainsi :

$$\frac{d_n}{n^\varepsilon} = \prod_{p|n} \frac{v_p(n) + 1}{p^{\varepsilon v_p(n)}}$$

Où $v_p(n)$ désigne la valuation p -adique et le produit parcourt les nombres premiers divisant n . On est donc amené à étudier les fonctions $f_p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f_p(x) = \frac{x+1}{p^{x\varepsilon}}$$

Pour tout $p \in \mathcal{P}$, $f_p \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et de dérivée :

$$f'_p(x) = \frac{p^{x\varepsilon} - (x+1)\varepsilon \ln(p)p^{x\varepsilon}}{p^{2\varepsilon x}}$$

On vérifie donc que f_p est croissante puis décroissante sur $\mathbb{R}$ et atteint son maximum en $x = 1/(\varepsilon \ln(p)) - 1$. Or, puisque $\mathcal{P}$ est infini, il existe un certain $p_\varepsilon \in \mathcal{P}$ tel que pour tout $p \geq p_\varepsilon$ premier, $\sup_{x \geq 0} f_p(x) = f_p(0) = 1$ puisque $1/(\varepsilon \ln(p)) - 1 \rightarrow -1$ lorsque $p \rightarrow \infty$. Ainsi :

$$0 \leq \frac{d_n}{n^\varepsilon} \leq \prod_{p \leq p_\varepsilon} f_p\left(\frac{1}{\varepsilon \ln(p)} - 1\right) := M_\varepsilon$$

D'où le résultat.

Exercice 19 [ENS]

Soit (x_n) une suite de réels positifs telle que $(x_n) \in \ell^1(\mathbb{N})$ et :

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_k = A > 0$$

Quelles valeurs peut prendre $\sum_{k=0}^{\infty} x_k^2$?

Corrigé proposé par J.J.T :

Remarquons que puisque (x_n) tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, il existe un certain rang $N \in \mathbb{N}$ après lequel $0 < x_n < 1$ et donc $0 < x_n^2 \leq x_n < 1$, d'où la convergence. Puisque (x_n) est à termes positifs, on peut directement écrire :

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_k^2 \leq \sum_{k=0}^{\infty} A x_k = A^2$$

Donc $\sum_{k=0}^{\infty} x_k^2 \in]0, A^2]$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$ et $t \in [0, 1[$, et considérons $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} = (\alpha t^k)_{k \in \mathbb{N}}$. Alors d'après la question (1), $(x_k) \in \ell^1(\mathbb{N})$ et :

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_k = \frac{\alpha}{1-t}$$

Et de la même façon :

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_k^2 = \frac{\alpha^2}{1-t^2}$$

En prenant $\alpha = (1-t)A$ on obtient alors que $\sum_{k=0}^{\infty} x_k = A$ et :

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_k^2 = A^2 \frac{1-t}{1+t}$$

Or, l'application $t \mapsto \frac{1-t}{1+t}$ réalise une bijection continue de $[0, 1[$ dans $]0, 1]$. On en tire que la somme des (x_k^2) peut atteindre n'importe quelle valeur de $]0, A^2]$. $\square$

Exercice 20 [ENS]

Soit G un groupe abélien fini de cardinal $n \geq 2$. Un morphisme $\chi : G \rightarrow \mathbb{C}^*$ est appelé un caractère.

- (1) Déterminer les caractères dans le cas où G est cyclique.
- (2) Soit H un sous-groupe de G qu'on ne suppose plus cyclique. Montrer que tout caractère de H se prolonge en un caractère de G .
- (3) Montrer l'existence de $(d_1, \dots, d_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$ vérifiant $d_1 | d_2 | \dots | d_n$ et :

$$G \cong \prod_{i=1}^n (\mathbb{Z}/d_i \mathbb{Z})$$

Corrigé proposé par J.J.T :

- (1) On suppose G cyclique et on prend $g \in G$ tel que $G = \langle g \rangle$. On a donc :

$$\text{Im}(\chi) = \{\chi(g^k), k \in \llbracket 1, n \rrbracket\} = \{\chi(g)^k, k \in \llbracket 1, n \rrbracket\} = \langle \chi(g) \rangle$$

Ainsi, on définit parfaitement χ par l'image de g . Puisque $\text{Im}(\chi)$ est un sous-groupe de $\mathbb{C}^*$ cyclique, c'est un groupe de racines de l'unité. Enfin, puisque l'on a $\chi(g^n) = \chi(g)^n = 1$, $\chi(g)$ peut prendre n'importe quelle valeur dans $\mathbb{U}_n$ et $\text{Im}(\chi)$ est alors un sous-groupe de $\mathbb{U}_n$.

Ainsi, les caractères de G sont les suivants :

$$\chi : G \rightarrow G, \exists \omega \in \mathbb{U}_n, \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \chi(g^k) = \omega^k$$

- (2) Soit χ un caractère de $H < G$. Si $H = G$ il n'y a rien à dire. Sinon, prenons $x \in G \setminus H$ et notons $K = \langle H, x \rangle = \{x^k h, h \in H\}$. On va prolonger χ en un caractère de K et en itérant le procédé un nombre fini de fois, on finira par avoir prolongé χ sur G tout entier.

Un caractère χ' prolongeant χ sur K est défini uniquement par $\chi'(x)$ car il coïncide avec χ sur H . La difficulté repose sur le fait que la définition de χ' doit absolument être cohérente avec celle de χ , ce qui nous conduit à considérer $\{k \in \mathbb{Z}, x^k \in H\}$. C'est un sous-groupe non trivial de $\mathbb{Z}$ car $x^{|G|} \in H$ d'après Lagrange et est donc de la forme $m\mathbb{Z}$ avec $m \geq 2$. Posons $\gamma = \chi(x^m)$ et choisissons un $\alpha \in \mathbb{U}$ tel que $\alpha^m = \gamma$. On définit alors χ' pour tout $h \in H$ et $k \in \mathbb{Z}$:

$$\chi'(x^k h) = \alpha^k \chi(h)$$

On vérifie que cela définit bien un caractère compatible avec la définition de χ . En faisant une récurrence finie sur le cardinal de G on a le résultat.

(3) On commence par montrer le lemme suivant :

Lemme : Soit G un groupe abélien fini. Alors il existe $x \in G$ tel que l'ordre de x soit $\exp(G)$, avec $\exp(G)$ le ppcm des ordres des éléments de G .

Preuve : Pour tout $g \in G$, on note $\omega(g)$ l'ordre de g . Montrons d'abord que si u, v sont deux éléments de G tels que $\omega(u) \wedge \omega(v) = 1$, alors $\omega(uv) = \omega(u)\omega(v)$. En effet, on considère $g \in \langle u \rangle \cap \langle v \rangle$. Alors $\langle g \rangle$ est un sous-groupe de $\langle u \rangle$ et $\langle v \rangle$ donc l'ordre de g divise à la fois celui de u et v , et donc leur PGCD. On en tire que $g = e$, et donc pour tout $(k, p) \in \mathbb{Z}^2$, $u^k \neq v^p$ sauf si $u^k = v^p = e$.

On a alors $(uv)^k = u^k v^k = e$ si et seulement si $u^k = v^{-k}$, ce qui est possible si et seulement si $u^k = v^{-k} = e$, donc $\omega(u) | \omega(uv)$ et $\omega(v) | \omega(uv)$. Les deux étant premiers entre eux, on en tire que $\omega(u)\omega(v) | \omega(uv)$. Or, puisque $(uv)^{\omega(u)\omega(v)} = 1$ on a $\omega(uv) | \omega(u)\omega(v)$, d'où le résultat.

Montrons désormais le lemme. Soit $x \in G$ d'ordre maximal. Il faut montrer que l'ordre de tout $y \in G$ divise celui de x . Fixons $y \in G$ et notons $n = \omega(x)$ et $m = \omega(y)$. Il s'agit de montrer que pour tout nombre premier p , $v_p(m) \leq v_p(n)$. Ainsi, pour p fixé, on note $m = p^a r$ et $n = p^b s$ avec $p \nmid r, p \nmid s$. Alors x^{p^b} est d'ordre s et y^r est d'ordre p^a . Avec ce qu'on vient de montrer, on a alors $\omega(x^{p^b} y^r) = p^a s \leq p^b s$ par hypothèse de la maximalité de l'ordre de x . Donc $a \leq b$, d'où le résultat. $\square$

Nous sommes désormais armés pour montrer le théorème voulu.

Théorème (Kronecker, faible) : Soit G un groupe abélien fini. Alors il existe $r \in \mathbb{N}^*$ et $d_1, \dots, d_r$ des entiers naturels tels que $d_1 | d_2 | \dots | d_r$ et :

$$G \cong \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/d_r\mathbb{Z}$$

Preuve : On raisonne par récurrence sur la taille de G . Si $|G| = 1$ ou $|G| = 2$ c'est évident. Supposons alors que la propriété est vérifiée pour tout groupe de taille $1, 2, \dots, n-1$ et prenons G un groupe de cardinal n , $n \geq 3$. Alors il existe $y \in G$ tel que son ordre soit l'exposant de G . On note $\omega(y) = m$ et H le groupe engendré par y . Soit $\tilde{\chi}$ un caractère bijectif de H sur $\mathbb{U}_m$ que l'on prolonge en un caractère χ de G . On va montrer que :

$$G \cong H \times \ker \chi$$

On pose donc $\phi : H \times \ker(\chi) \rightarrow G$ qui à (h, k) associe hk . Alors ϕ est injectif. En effet, si $hk = e$ alors $k \in H \cap \ker(\chi) = \{e\}$ car on a supposé $\chi|_H$ bijectif. Donc $h = k = e$. ϕ est injectif.

Pour montrer que ϕ est surjectif, on remarque que puisque l'ordre de tout élément de G divise m , χ est à valeurs dans $\mathbb{U}_m$. Or, puisque $\chi|_H$ est un isomorphisme, on en tire que les $(h \ker \chi)_{h \in H}$ forment une partition de G par le premier théorème d'isomorphisme, d'où le résultat.

Donc $|\ker(\chi)| = |G|/|H| < n$, donc il existe $r \geq 2$ et $d_1 | \dots | d_{r-1}$ tels que :

$$G \cong \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/d_{r-1}\mathbb{Z} \times H \cong \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/d_{r-1}\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$$

Par cet isomorphisme, on peut exhiber un élément $g \in G$ pour lequel l'élément correspondant dans le produit ci-dessus soit $(0, \dots, 1, 0)$ donc d'ordre d_{r-1} , donc $d_{r-1} | m$, d'où le résultat. $\square$

Exercice 21 [ENS]

On pose $u_0 = 4$, $u_1 = u_2 = 0$ et $u_3 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+4} = u_n + u_{n+1}$. Montrer que pour tout p premier, $p \mid u_p$.

Corrigé proposé par J.J.T :

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ u_{n+3} \end{pmatrix}$$

D'après la définition de (u_n) , on a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} U_n \triangleq AU_n$$

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ et elle vérifie :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc $\text{Tr}(A^0) = 4$, $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(A^2) = 0$ et $\text{Tr}(A^3) = 3$. Il semble donc que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \text{Tr}(A^n)$. Vérifions si c'est bien le cas. Un calcul direct nous fournit :

$$A^4 - A - I_n = \mathcal{O}_n \implies \forall n \in \mathbb{N}, A^{n+4} = A^{n+1} + A^n$$

On en déduit que $u_n = \text{Tr}(A^n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il faut donc montrer que pour tout p premier, $\text{Tr}(A^p) \equiv 0[p]$. Or, $\text{Tr}(A) \equiv 0[p]$, et donc si $\text{Tr}(A^p) \equiv \text{Tr}(A)^p[p]$ alors on aura gagné (ceci ressemble fortement au petit théorème de Fermat). Montrons qu'en réalité ce résultat est toujours vrai pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.

Lemme : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ et p un nombre premier. Alors :

$$\text{Tr}((A + B)^p) \equiv \text{Tr}(A^p) + \text{Tr}(B^p)[p]$$

Preuve : On commence par écrire l'évidence :

$$(A + B)^p = \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \{A, B\}^p} \alpha_1 \dots \alpha_p$$

Or, la trace de chaque élément de la somme reste inchangée sous permutation circulaire des termes. Ainsi, pour $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \{A, B\}^p$ on est amené à regarder l'ensemble $\Gamma_\alpha = \{(\alpha_{1+k[p]}, \dots, \alpha_{p+k[p]}), k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket\}$ l'ensemble des permutations circulaires. Or, ce dernier peut être vu naturellement comme un sous-groupe de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ en considérant l'application $\phi : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rightarrow \Gamma(\alpha)$:

$$\phi : k \mapsto (\alpha_{1+k}, \dots, \alpha_{p+k})$$

ϕ est un morphisme de groupes surjectif si l'on définit une loi d'addition sur $\Gamma(\alpha)$ qui est simplement la somme des indices terme à terme réduite modulo p . Ce morphisme étant surjectif, d'après le premier théorème d'isomorphisme on en déduit que $|\Gamma(\alpha)|$ divise p . Or, si $\alpha \neq (A, \dots, A)$ et $\alpha \neq (B, \dots, B)$, $\Gamma(\alpha)$ contient au moins 2 éléments. On en déduit que $|\Gamma(\alpha)| = p$ dans ce cas-là, d'où le résultat en exploitant la linéarité de la trace.

Montrons alors que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, $\text{Tr}(M^p) \equiv \text{Tr}(M)[p]$. Il faut d'abord mobiliser le petit théorème de Fermat : $\text{Tr}(M)^p \equiv \text{Tr}(M)[p]$. Ensuite, par récurrence triviale et en utilisant le lemme précédent :

$$\text{Tr}(M^p) = \text{Tr} \left(\left(\sum_{1 \leq i, j \leq n} m_{i,j} E_{i,j} \right)^p \right) \equiv \sum_{1 \leq i, j \leq n} m_{i,j}^p \text{Tr}(E_{i,j}^p)$$

En notant $(E_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Or, pour tout $(i, j, k, \ell) \in \llbracket 1, n \rrbracket^4$, $E_{i,j} E_{k,\ell} = \delta_{j,k} E_{i,\ell}$ avec $\delta_{j,k}$ le delta de Kronecker. On en déduit que $E_{i,j}^2 = \delta_{i,j} E_{i,j}$. On en déduit :

$$\text{Tr}(M^p) = \sum_{i=1}^n m_{i,i}^p \equiv \sum_{i=1}^n m_{i,i}[p]$$

D'après le petit théorème de Fermat. Il s'ensuit le résultat voulu. Ainsi, $u_p = \text{Tr}(A^p) \equiv \text{Tr}(A) \equiv 0[p]$ pour tout premier p . $\square$

Exercice 22 [X]

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monotone. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de f est au plus dénombrable.

Corrigé proposé par V.K :

Quitte à considérer son opposée, on pose $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ croissante. Nous allons ici utiliser une propriété des fonctions monotones, le théorème de la limite monotone appliqué à f définie sur $\mathbb{R}$ croissante :

f admet une limite finie à gauche et à droite en tout point $x \in \mathbb{R}$, et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x^-) := \lim_{t \rightarrow x^-} f(t) \leq f(x) \leq f(x^+) := \lim_{t \rightarrow x^+} f(t)$$

Mais avant de l'exploiter, démontrons-le. Soit donc $x \in \mathbb{R}$. Si f est continue en x , le résultat est immédiat (on a l'égalité à chaque cran de l'inégalité et $f(x)$ est fini). On suppose donc de plus que f est discontinue en x . En extrapolant l'idée d'inégalité dans $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, on a, puisque f est croissante :

$$\forall t \in \mathbb{R}, t < x \Rightarrow f(t) \leq f(x) \text{ et } t > x \Rightarrow f(t) \geq f(x)$$

Ainsi, par passage à la limite dans les inégalités, on obtient le résultat souhaité :

$$\lim_{t \rightarrow x^-} f(t) \leq f(x) \leq \lim_{t \rightarrow x^+} f(t)$$

Ces deux limites existent bien comme borne supérieure d'un ensemble majoré et borne inférieure d'un ensemble minoré respectivement. On s'attaque maintenant à la résolution de l'exercice. L'idée est de se placer sur l'intervalle $[n, n+1]$ pour $n \in \mathbb{N}$. On pose alors :

$$A_n := \left\{ x \in [n, n+1], f(x^+) - f(x^-) \geq \frac{1}{n} \right\}$$

Montrons par l'absurde que A_n est fini. On le suppose donc infini et on note $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite injective d'éléments de A_n . On note alors $\Delta a_i = f(a_i^+) - f(a_i^-)$. Par définition de A_n et par croissance de f , on obtient l'inégalité suivante dans $\overline{\mathbb{R}}$:

$$f(n+1) - f(n) \geq \sum_{i=1}^{+\infty} \Delta a_i \geq \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

Cela est absurde car f prend des valeurs finies en n et $n + 1$. Ainsi, A_n est fini pour tout $n \in \mathbb{N}$. On écrit donc l'ensemble D_n des points de discontinuité de f sur $[n, n + 1]$ et D_+ celui des points de discontinuité de f sur $\mathbb{R}_+$ comme suit :

$$D_n = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \text{ et } D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$$

Ainsi, puisque les A_k sont tous finis, D_n est au plus dénombrable, et on en déduit que D_+ est lui aussi au plus dénombrable. On peut réinvestir ce même raisonnement pour montrer que D_- , l'ensemble des points de discontinuité de f sur $\mathbb{R}_-$, est au plus dénombrable, ce qui nous permet de conclure :

$D = D_+ \cup D_-$ l'ensemble des points de discontinuité de f sur $\mathbb{R}$ est au plus dénombrable.

□

Exercice 23 [ENS]

Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire. On suppose que toutes les racines de P sont de module ≤ 1 . Montrer que les racines de P autres que 0 sont des racines de l'unité.

Corrigé proposé par J.J.T :

Le polynôme P peut être vu comme le polynôme caractéristique de la matrice compagnon de P qu'on va noter $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Ce dernier est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et donc semblable à une matrice triangulaire supérieure T dont les éléments diagonaux sont les racines de P , qu'on va noter $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sans leur multiplicité. Pour résoudre l'exercice, il faut être capable de faire la remarque suivante : pour tout $k \geq 1$, le polynôme caractéristique de M^k est le même que celui de T^k . Or, le polynôme caractéristique de M^k est un élément de $\mathbb{Z}[X]$, unitaire. Il en résulte que pour tout $k \geq 1$:

$$Q_k(X) = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i^k) \in \mathbb{Z}[X]$$

On utilise alors la formule de Newton pour les coefficients de ce dernier ; en développant le produit, on trouve :

$$Q_k(X) = \sum_{i=0}^n a_i(k) X^i, \quad a_i(k) = (-1)^{n-i} \sum_{\substack{A \subset \llbracket 1, n \rrbracket \\ |A|=n-i}} \prod_{a \in A} \lambda_a^k$$

On trouve que, puisque les (λ_i) sont de module inférieur à 1 et que les $(a_i(k))$ sont dans $\mathbb{Z}$ à k fixé, il y a seulement $2^{\binom{n}{i}}$ valeurs possibles pour chaque $a_i(k)$, et donc qu'un nombre fini de valeurs possibles pour les $(n+1)$ -uplets $(a_0(k), \dots, a_n(k))$ à $k \geq 1$ fixé. On fait donc varier k autant qu'on veut ; par le principe des tiroirs, il existe $(p, \ell) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tels que $(\lambda_1^p, \dots, \lambda_n^p) = (\lambda_1^\ell, \dots, \lambda_n^\ell)$. Ainsi, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\lambda_i^{\ell-p} = 1$, d'où le résultat. □

Exercice 24 [X/ENS]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer l'espace vectoriel engendré par les matrices nilpotentes de taille n .

Corrigé proposé par J.J.T :

Notons $\mathcal{N}$ l'espace des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On remarque par linéarité de la trace que tout élément de $\text{vect}_{\mathbb{R}}(\mathcal{N})$ est de trace nulle ; on s'attend alors à ce que ce dernier soit égal à $\ker(\text{Tr})$. Montrons

que notre intuition est correcte ; on a déjà l'inclusion dans un sens. Pour montrer l'autre sens, il va falloir passer par un lemme assez naturel.

Lemme : Si $M \in \ker(\text{Tr})$, alors M est semblable à une matrice dont les éléments diagonaux sont 0.

Preuve : On raisonne par récurrence sur la taille des matrices. Si $n = 0$, le résultat est immédiat. Supposons donc que le résultat est montré au rang $n - 1$ et montrons qu'il est vrai pour le rang n . Soit $A \in \ker(\text{Tr})$, non nul. Montrons qu'il existe un $x \in \mathbb{R}^n$ tel que (x, Ax) ne soit pas liée ; si pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, (x, Ax) est liée, ça veut dire que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, il existe un $\lambda(x) \in \mathbb{R}$ tel que $Ax = \lambda(x)x$. Munissons $\mathbb{R}^n$ de sa base canonique que l'on va noter $(e_1, \dots, e_n)$ et de son produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Alors il existe un $\Lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$A \sum_{i=1}^n e_i = \sum_{i=1}^n \lambda(e_i) e_i = \Lambda \sum_{i=1}^n e_i$$

En projetant on trouve que $\Lambda = \lambda(e_i)$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Ainsi, dans la base $(e_1, \dots, e_n)$, $A = \Lambda I_n$. Mais $\text{Tr}(A) = n\Lambda = 0$, donc $\Lambda = 0$ ce qui est absurde puisque A est supposé non nul.

Prenons donc un vecteur x tel que (x, Ax) ne soit pas une famille liée, et complétons ce dernier en une base de $\mathbb{R}^n$ notée $\mathcal{B}$. Alors dans cette base, la matrice A est semblable à une matrice qui a un 0 en haut à gauche. On en tire que la sous-matrice de A dans cette base, obtenue en enlevant la première ligne et la première colonne, est une matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ de trace nulle, donc semblable à une matrice dont les éléments diagonaux sont tous nuls, d'où le résultat. Ainsi, toute matrice à trace nulle peut s'écrire comme la somme de deux matrices qui sont semblables à des matrices triangulaires supérieures et inférieures strictes, donc nilpotentes, d'où l'inclusion réciproque. $\square$

Exercice 25 [X/ENS]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, G un sous-groupe fini de $\text{GL}_n(\mathbb{K})$. On note $W^G = \{u \in \mathbb{K}^n, \forall g \in G, g(u) = u\}$. Montrer que W^G est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, puis que :

$$\dim(W^G) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{Tr}(g)$$

Corrigé proposé par J.J.T :

Il est immédiat que W^G est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. La formule nous incite à décrire l'endomorphisme $\phi = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g$. Montrons que ϕ est un projecteur, et que son image est W^G .

$$\phi \circ \phi = \frac{1}{|G|^2} \sum_{g \in G} \sum_{h \in G} g \circ h$$

Or, pour tout $h \in G$, $g \mapsto g \circ h$ est une bijection de G dans lui-même. Ainsi :

$$\phi \circ \phi = \frac{1}{|G|^2} \sum_{g \in G} \sum_{h \in G} g = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g = \phi$$

Donc ϕ est un projecteur. Il est clair que $W^G \subset \text{Im}(\phi)$. En effet, si x est point fixe de chaque élément de G , il est également point fixe de ϕ :

$$\phi(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} x = x$$

Pour l'inclusion réciproque, soit $x \in \text{Im}(\phi)$. Il existe donc un $y \in \mathbb{K}^n$ tel que :

$$x = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g(y) \implies \forall h \in G, h(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} h(g(y)) = x$$

Pour les mêmes raisons qu'avant, d'où le résultat. $\square$

Exercice 26 [X/ENS]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ rencontre $\text{GL}_n(\mathbb{R})$.

On commence par montrer le lemme de représentation de Riesz :

Lemme : Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. On note $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$. Alors $E \cong E^*$.

Preuve : On pose $\phi : E \rightarrow E^*$ l'application $a \mapsto [x \mapsto \langle a, x \rangle]$. Par bilinéarité du produit scalaire, ϕ est linéaire. Soit $a \in \ker \phi$. Alors pour tout $x \in E$, $\langle a, x \rangle = 0$. En particulier, $\|a\|^2 = 0$, et donc $a = 0$ car le produit scalaire est défini positif. ϕ est donc un morphisme injectif de $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels, et puisque $\dim(E) = \dim(E^*)$ on conclut que ϕ est également surjectif, d'où le résultat. $\square$

On munit ainsi $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $\langle A, B \rangle = \text{Tr}(A^T B)$. Étant donné un hyperplan $\mathcal{H} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on peut le voir comme le noyau d'une forme linéaire de ce dernier, et donc d'après le lemme de Riesz, il existe une matrice H telle que $\mathcal{H} = \text{vect}(H)^\perp$. Il faut donc montrer qu'il existe une matrice inversible perpendiculaire à H . Déjà, notons que H^T peut s'écrire PJ_rQ^{-1} , avec P, Q deux matrices inversibles et J_r la matrice qui a des 1 sur les r premières valeurs diagonales, et des zéros à tous les autres endroits, avec $r = \text{rg}(H^T)$. On en déduit alors que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\langle H, A \rangle = \text{Tr}(J_r(Q^{-1}AP))$$

Car la trace est stable par permutations circulaires. Ainsi, puisqu'on considère A inversible et que $(\text{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$ est un groupe, en posant $U = Q^{-1}AP$ comme changement de variables il suffit de montrer que quel que soit $1 \leq r \leq n$, il existe une matrice inversible U telle que $\langle J_r, U \rangle = 0$. Construisons une telle matrice : soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique, j_r l'endomorphisme associé à J_r dans cette base et u l'endomorphisme associé à U . Il serait idéal que la diagonale de $J_r U$ soit nulle ; pour ce faire, on peut considérer l'endomorphisme défini à partir des coordonnées de base : $u(e_i) = e_{i+1}$ si $1 \leq i \leq n-1$, et $u(e_n) = e_1$. Il est évident que u est inversible ($u^n = \text{Id}$), et que sa matrice dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ est une matrice dont les coefficients valent 1 sur la sous-diagonale, 1 en haut à droite et 0 à tous les autres endroits. Par un produit matriciel par blocs, on en déduit que la diagonale de $J_r U$ est nulle, d'où le résultat. $\square$

Exercice 27 [X/ENS]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et on fixe $X, Y \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi uniforme. On souhaite estimer la probabilité $p_n = P(X \wedge Y = 1)$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

- (1) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $N \geq 1$, et $(A_1, \dots, A_N) \in \mathcal{F}^N$. Montrer la formule du crible :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^N A_k\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{\substack{I \subset \llbracket 1, n \rrbracket \\ |I|=k}} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)$$

- (2) On définit $\mu : \mathbb{N}^* \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ de la manière suivante :

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } \exists p \in \mathcal{P}, p^2 | n \\ (-1)^{|\Gamma_n|}, & \text{avec } \Gamma_n = \{p \in \mathcal{P}, p | n\} \end{cases}$$

Montrer que pour tout $n \geq 1$:

$$p_n = \frac{1}{n^2} \sum_{d=1}^n \mu(d) \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor^2$$

- (3) On admet que $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$. Démontrer que la suite (p_n) converge et déterminer sa limite.

Corrigé proposé par J.J.T :

C'est un exercice très long qui est malheureusement déjà tombé à l'oral. Il est tout simplement interminable. Cette démonstration faisait partie de mon cours d'AOI! On va se permettre de sauter la démonstration des lemmes intermédiaires plus « immédiats » afin de raccourcir le document.

- (1) On commence avec un lemme :

Lemme : Soit A un ensemble fini de réels. Alors on a :

$$\prod_{x \in A} (1 - x) = 1 + \sum_{\emptyset \neq I \subset A} (-1)^{|I|} \prod_{x \in I} x$$

Démonstration : Une récurrence triviale sur la taille de A suffit. $\square$

On va alors montrer le résultat demandé, appelé formule du crible de Poincaré, mais avec les cardinaux (je vous laisse adapter la preuve pour des probabilités, il suffit de remplacer les cardinaux par des probabilités) :

Lemme : Soit E un ensemble non vide, $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de parties de E . Alors :

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{\emptyset \neq I \subset \mathbb{N}_n} (-1)^{|I|+1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|$$

Démonstration : C'est très classique. On peut écrire :

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{x \in E} \mathbf{1}_{\bigcup_{i=1}^n A_i}(x)$$

Ici, $\mathbf{1}$ désigne la fonction indicatrice de l'union des (A_i) pour i allant de 1 à n . Travaillons sur cette expression :

$$\mathbf{1}_{\bigcup_{i=1}^n A_i} = 1 - \mathbf{1}_{\bigcap_{i=1}^n \overline{A_i}} = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - \mathbf{1}_{A_i})$$

On applique la formule de Vandermonde que l'on vient d'établir afin de pouvoir dire :

$$\mathbf{1}_{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \sum_{I \subset \mathbb{N}_n} (-1)^{|I|+1} \prod_{i \in I} (\mathbf{1}_{A_i})$$

En sommant sur E , on en déduit la formule du crible de Poincaré. $\square$

(2) Pour tout $(i, j) \in (\mathbb{N}_n)^2$:

$$\mathbb{P}(X = i) = \mathbb{P}(Y = i) = \frac{1}{n}$$

$$\mathbb{P}((X, Y) = (i, j)) = \frac{1}{n^2}$$

Pour tout $d \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note A_d l'évènement « $d|X$ et $d|Y$ ». On a donc que :

$$\mathbb{P}(A_d) = \frac{|\{(a, b) \in \mathbb{N}_n, d|a \text{ et } d|b\}|}{n^2} = \frac{1}{n^2} \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor^2$$

Notons $P_n = \{p \in \mathcal{P}, p \leq n\} = \{p_1, p_2, \dots, p_N\}$. On note $A = \{(a, b) \in (\mathbb{N}_n)^2, a \wedge b = 1\}$, et pour tout $1 \leq i \leq N$, $B_i = \{(a, b) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, p_i|a \text{ et } p_i|b\}$. Alors on a :

$$A = \left(\bigcup_{i=1}^N B_i \right)^C$$

Or, avec le crible de Poincaré démontré à la question 1, on a :

$$\left| \bigcup_{i=1}^N B_i \right| = \sum_{\emptyset \neq I \subset \mathbb{N}_N} (-1)^{1+|I|} \left| \bigcap_{i \in I} B_i \right|$$

Ainsi, en prenant le complémentaire, on a :

$$|A| = n^2 + \sum_{\emptyset \neq I \subset \mathbb{N}_N} (-1)^{|I|} \left| \bigcap_{i \in I} B_i \right|$$

Par indépendance mutuelle des A_{p_i} montrée avec le lemme de Gauss, on a :

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{1}{n^2} \left(n^2 + \sum_{\emptyset \neq I \subset \mathbb{N}_N} (-1)^{|I|} \left\lfloor \frac{n}{\prod_{i \in I} p_i} \right\rfloor^2 \right) \\ &= \frac{1}{n^2} \mu(1) \left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor^2 + \frac{1}{n^2} \sum_{d=2}^n \mu(d) \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{d=1}^n \mu(d) \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor^2 \end{aligned}$$

$\square$

(3) Commençons avec un lemme classique sur la fonction μ :

Lemme : On a le résultat suivant :

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Preuve : Si $n = 1$, on a le résultat par définition de μ . Supposons maintenant que $n \geq 2$. Alors :

$$\sum_{d|n} \mu(d) = 1 + \sum_{I \subset \Gamma_n} (-1)^{|I|} = 1 + \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 1 - 1 = 0$$

D'où le résultat. $\square$

On obtient alors que pour tout $s > 1$, on a :

$$\zeta(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = 1$$

En effet, les deux séries sont absolument convergentes pour $s > 1$ et donc on peut effectuer leur produit de Cauchy ; en regroupant les termes selon le dénominateur, on trouve bien ce résultat avec le lemme. On va alors montrer que $p_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 6/\pi^2$. Pour ce faire, on montre d'abord que pour tout $1 \leq d \leq n$:

$$0 \leq \frac{1}{d^2} - \frac{1}{n^2} \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor^2 \leq \frac{2}{dn} - \frac{1}{n^2}$$

En notant $\left(\frac{n}{d}\right)^2 = \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor^2 + \theta \left(\left(\frac{n}{d}\right)^2\right)$ avec θ qui désigne la partie décimale, l'inégalité de gauche est triviale :

$$\frac{1}{d^2} - \frac{1}{n^2} \left(\frac{n^2}{d^2} - \theta \left(\frac{n^2}{d^2}\right)\right) = \frac{1}{n^2} \theta \left(\frac{n^2}{d^2}\right) \geq 0$$

L'inégalité de droite s'obtient en multipliant par n^2 :

$$\frac{n^2}{d^2} - \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor^2 \leq \frac{2n}{d} - 1 \iff \left(\frac{n}{d} - 1\right)^2 \leq \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor^2$$

Ce qui est toujours vrai. On obtient ainsi :

$$0 \leq \left| \sum_{d=1}^n \mu(d) \left(\frac{1}{d^2} - \frac{1}{n^2} \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor^2 \right) \right| \leq \sum_{d=1}^n \left(\frac{2}{dn} - \frac{1}{n^2} \right)$$

Or, la somme de droite nous donne :

$$\sum_{d=1}^n \left(\frac{2}{dn} - \frac{1}{n^2} \right) = \frac{2}{n} \sum_{d=1}^n \left(\frac{1}{d} \right) - \frac{1}{n} \sim 2 \frac{\log(n)}{n}$$

Et donc tend vers 0. Ainsi, lorsque $n \rightarrow \infty$, on a que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (p_n) = \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} = \frac{6}{\pi^2}$$

D'après ce qu'on a montré au début de l'exercice, ce qui achève la démonstration. $\square$

Exercice 28 [X/ENS]

Soit $0 < \delta < 1$. Montrer que l'ensemble $\Omega_\delta = \{\{n^\delta\}, n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[0, 1]$, avec $\{x\}$ désignant la partie décimale.

Solution proposée par J.J.T :

On commence par montrer un petit lemme :

Lemme : Soit $(a_n), (b_n)$ deux suites réelles strictement croissantes tendant vers $+\infty$ telles que $a_{n+1} - a_n = o(1)$. Alors l'ensemble $D = \{a_n - b_m, (n, m) \in \mathbb{N}^2\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Preuve : Supposons qu'il existe $(x, \eta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ tel que $I_\eta \cap D = \emptyset$, avec $I_\eta =]x - \eta, x + \eta[$. Il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $a_{n+1} - a_n \leq \eta/2$. Il existe un $M \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $m \geq M$, $b_m \geq a_N - x$. On pose alors pour tout $n \geq N$, $u_n = a_n - b_M$. $u_N = a_N - b_M \leq x$, et pour tout $n \geq N$, $|u_{n+1} - u_n| \leq \eta/2$. (u_n) est également strictement croissante. Par hypothèse, pour tout $n \geq N$, $u_n \notin I_\eta$.

Or, en notant $n_0 = \sup_{n \geq N} \{u_n < x - \eta\}$, on a alors $|u_{n_0+1} - u_{n_0}| \leq \eta/2$ mais $I_\eta \subset [u_{n_0}, u_{n_0+1}]$, ce qui est absurde, d'où le lemme. $\square$

Appliquons ceci à notre problème. On pose $a_n = n^\delta$ et $b_m = \lfloor m^\delta \rfloor$. Quitte à considérer une sous-suite extraite de (b_n) strictement croissante, $(a_n), (b_m)$ vérifient les critères du lemme ; en effet :

$$a_{n+1} - a_n = n^\delta \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\delta - 1 \right) =_\infty n^\delta \left(\frac{\delta}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) = o(1)$$

Donc l'ensemble $D = \{a_n - b_m, (n, m) \in \mathbb{N}^2\}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Or, $\phi : x \mapsto \{x\}$ est une application continue par morceaux et surjective de $\mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$. On en déduit aisément que $\phi(D)$ est dense dans $[0, 1]$. Or, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $b_m \in \mathbb{Z}$ et donc $\phi(a_n - b_m) = \phi(a_n) = \{n^\delta\}$. Donc $\phi(D) = \Omega_\delta$ est dense dans $[0, 1]$, d'où le résultat. $\square$

Remarque : On retrouve par ailleurs un autre résultat des oraux X/ENS qui apparaît souvent : la densité de $\{\cos(\ln(n+1))\}$, $n \in \mathbb{N}$ de la même manière !

Exercice 29 [X]

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires iid à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Pour tout $N \geq 1$, on pose $C_N = \#\{X_1, \dots, X_N\}$.

- (1) Montrer que $\mathbb{E}(C_N) = o(N)$.
- (2) On suppose que les (X_n) admettent une espérance. Montrer que $\mathbb{E}(C_N) = o(\sqrt{N})$.

Corrigé proposé par J.J.T :

- (1) Ce n'est pas très difficile. Soit $a > 1$. On a, pour $N \geq 1$:

$$C_N = \#\{X_k, X_k \leq a\} + \#\{X_k, X_k > a\} \leq a + \#\{1 \leq k \leq N, X_k > a\}$$

Donc $\mathbb{E}(C_N) \leq a + N\mathcal{P}(X_1 > a)$. En prenant $a = \sqrt{N}$, on en tire que $\mathbb{E}(C_N)/N \leq \frac{1}{\sqrt{N}} + \mathcal{P}(X_1 > \sqrt{N}) = o(1)$. $\square$

- (2) Qui dit espérance dit inégalité de Markov ; avec exactement le même raisonnement que précédemment, on obtient le raffinement $C_N = \mathcal{O}(\sqrt{N})$ mais ce n'est pas suffisant. On va devoir être plus délicat. Il faut remarquer que, pour $a > 1$:

$$a\mathcal{P}(X_1 > a) \leq \sum_{k>a} a\mathcal{P}(X = k) \leq \sum_{k>a} k\mathcal{P}(X_1 = k) = o(1)$$

Car l'existence de l'espérance entraîne la sommabilité de $(k\mathcal{P}(X_1 = k))$. En prenant $\varepsilon > 0$ et $a = \varepsilon\sqrt{N}$ dans l'inégalité de la question 1, on a :

$$\mathbb{E}(C_N) \leq \varepsilon\sqrt{N} + N\mathcal{P}(X_1 > \varepsilon\sqrt{N})$$

Or, il existe un $N' \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $N \geq N'$, $\varepsilon\sqrt{N}\mathcal{P}(X_1 > \varepsilon\sqrt{N}) \leq \varepsilon^2$. Ainsi, pour tout $N \geq N'$:

$$\mathbb{E}(C_N) \leq \varepsilon\sqrt{N} + \frac{\sqrt{N}}{\varepsilon} \cdot \varepsilon\sqrt{N}\mathcal{P}(X_1 > \varepsilon\sqrt{N}) \leq \varepsilon\sqrt{N} + \varepsilon\sqrt{N} = 2\varepsilon\sqrt{N}$$

D'où le résultat. $\square$

Exercice 30 [ENS]

Soit $n \geq 1$. Y a-t-il plus de dérangements pairs ou impairs de $\mathfrak{S}_n$?

Solution proposée par J.J.T :

C'est très astucieux. Il faut considérer le déterminant de taille n suivant pour $x \in \mathbb{R}$:

$$P(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & x & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & x \end{vmatrix}$$

En sommant toutes les lignes, on trouve :

$$P(x) = \begin{vmatrix} x+n-1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x+n-1 & x & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ x+n-1 & 1 & \dots & 1 & x \end{vmatrix} = (x+n-1)(x-1)^{n-1}$$

En soustrayant la première ligne à toutes les autres, le déterminant devient celui d'une matrice triangulaire supérieure. En même temps, P détecte très bien les points fixes. En effet, avec la formule du déterminant, en notant pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ $\varepsilon(\sigma)$ la signature et $\nu(\sigma)$ le nombre de points fixes :

$$P(x) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) x^{\nu(\sigma)}$$

Les dérangements sont les permutations σ pour lesquelles $\nu(\sigma) = 0$. On en tire :

$$P(0) = (-1)^{n-1}(n-1) = \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n \\ \nu(\sigma)=0}} \varepsilon(\sigma)$$

On en déduit qu'il y a plus de dérangements impairs lorsque n est pair et plus de dérangements pairs lorsque n est impair. $\square$

Exercice 31 [ENS]

Soit $u_0 \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \geq 0$, on pose :

$$u_{n+1} = u_n + \int_{u_n}^{\infty} e^{-t^2} dt$$

Trouver un équivalent de la suite (u_n) .

Corrigé proposé par J.J.T :

L'application $f : x \mapsto e^{-x^2}$ est bien intégrable sur $\mathbb{R}$ tout entier donc la suite a un sens. Tout d'abord, (u_n) tend vers $+\infty$. En effet, (u_n) est clairement strictement croissante. Supposons qu'elle converge vers un certain $\ell \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\ell = \ell + \int_{\ell}^{\infty} e^{-t^2} dt$$

Donc $\ell = +\infty$ et $u_n \sim u_{n+1}$. Il est donc naturel de chercher un équivalent de l'application :

$$h : x \mapsto \int_x^\infty e^{-t^2} dt$$

En posant $u = t - x$ puis $v = ux$ successivement on trouve que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$h(x) = \frac{e^{-x^2}}{2x} \int_0^\infty e^{-v/x} e^{-v} dv$$

On applique alors le théorème de convergence dominée en prenant comme majorant intégrable $v \mapsto e^{-v}$ pour trouver l'équivalent suivant :

$$h(x) \sim \frac{e^{-x^2}}{2x}$$

Soit alors $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $a_n \in]u_n, u_{n+1}[$ tel que :

$$g(u_{n+1}) - g(u_n) = \varepsilon_n g'(a_n) \sim \frac{e^{-u_n^2}}{2u_n} g'(a_n)$$

Avec $\varepsilon_n = u_{n+1} - u_n$. Ainsi, en prenant $g : x \mapsto e^{x^2}$, on trouve que :

$$e^{u_{n+1}^2} - e^{u_n^2} \sim \frac{a_n}{u_n} e^{a_n^2 - u_n^2}$$

$a_n/u_n \rightarrow 1$ par encadrement et :

$$0 \leq a_n^2 - u_n^2 \leq \varepsilon_n (u_{n+1} + u_n) \sim e^{-u_n^2}$$

Pour n assez grand. De ce fait, on a :

$$e^{u_{n+1}^2} - e^{u_n^2} \sim 1$$

Donc $e^{u_n^2} \sim n$. Autrement dit :

$$u_n \sim \sqrt{\ln(n)}$$

□

Exercice 32 [X/ENS]

Déterminer un développement asymptotique à deux termes de la série :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(\ln(n))}{n}$$

Corrigé proposé par J.J.T :

Commençons avec un lemme bien classique.

Lemme : Pour $x \geq 1$, si $b : [1, x] \rightarrow \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^1$ et $f : [1, x] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors :

$$\sum_{n \leq x} f(n)b(n) = F(x)b(x) - \int_1^x F(t)b'(t) dt$$

Preuve : Il suffit d'appliquer une transformée d'Abel classique pour conclure :

$$\sum_{n \leq x} f(n)b(n) = F(x)b(\lfloor x \rfloor) - \sum_{n \leq x-1} F(n)(b(n+1) - b(n))$$

Or, cette dernière somme peut se réécrire :

$$\sum_{n \leq x-1} F(n) \int_n^{n+1} b'(t) dt = \sum_{n \leq x-1} \int_n^{n+1} F(t)b'(t) dt = \int_1^{\lfloor x \rfloor} F(t)b'(t) dt$$

On a alors :

$$\sum_{n \leq x} f(n)b(n) = F(x)b(\lfloor x \rfloor) - \int_1^x F(t)b'(t) dt = F(x)b(x) + \int_{\lfloor x \rfloor}^x F(x)b'(t) dt - \int_1^x F(t)b'(t) dt$$

D'où le résultat. □

Pour tout $x \geq 1$, on note $S(x) = \sum_{1 \leq n \leq x} \frac{\cos(\ln(n))}{n}$. Alors il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ vérifiant :

$$S(x) = C + \sin(\ln(x)) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right)$$

En effet, en effectuant une sommation d'Abel on obtient :

$$S(x) = \cos(\ln(x))H(x) + \int_1^x \frac{\sin(\ln(t))}{t} H(t) dt$$

Or, $H(x) = \ln(x) + \gamma + u(x)$ avec $u(x) = \mathcal{O}(1/x)$. De ce fait, on peut écrire :

$$S(x) = \cos(\ln(x))H(x) + I_1(x) + I_2(x) + I_3(x)$$

Avec :

$$I_1(x) = \int_1^x \frac{\sin(\ln(t)) \ln(t)}{t} dt, \quad I_2(x) = \gamma \int_1^x \frac{\sin(\ln(t))}{t} dt \text{ et } I_3(x) = K + \mathcal{O}(1/x)$$

Pour un certain $K \in \mathbb{R}$ (vérifier que le reste intégral est bien en $\mathcal{O}(1/x)$). On calcule aisément I_1 et I_2 pour tout x ; on trouve $\sin(\ln(x)) - \cos(\ln(x)) \ln(x)$ et $-\gamma \cos(\ln(x)) + \gamma$. On pose alors $C = K + \gamma$. On a alors le résultat souhaité :

$$\begin{aligned} S(x) &= C + \cos(\ln(x))(H(x) - \ln(x) - \gamma) + \sin(\ln(x)) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= C + \sin(\ln(x)) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Exercice 33 [X]

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $A = \left(\binom{i+j}{i} \right)_{0 \leq i, j \leq n}$. Calculer $\det(A)$.

Corrigé proposé par J.J.T :

C'est un exercice sympa. On montre d'abord la formule de Vandermonde :

Lemme (Formule de Vandermonde) : Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$. Alors pour tout $0 \leq k \leq m+n$:

$$\sum_{h=0}^k \binom{m}{h} \binom{n}{k-h} = \binom{m+n}{k}$$

Preuve : C'est ultra classique. On considère $P(X) = (1 + X)^{m+n}$. Alors d'après la formule du binôme de Newton :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{m+n} \binom{m+n}{k} X^k$$

D'autre part :

$$P(X) = (1 + X)^m (1 + X)^n = \left(\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} X^k \right) \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k \right) = \sum_{k=0}^{m+n} X^k \left(\sum_{h=0}^k \binom{m}{h} \binom{n}{k-h} \right)$$

D'où le résultat par unicité des coefficients d'un polynôme. On procède alors de la façon suivante : on remarque tout d'abord que :

$$\binom{i+j}{i} = \binom{i+j}{j} = \binom{i+j}{\min(i,j)}$$

On pose alors $B = \left(\binom{i}{j} \right)_{0 \leq i,j \leq n}$ avec la convention $\binom{i}{j} = 0$ lorsque $j > i$. Alors par un calcul direct, grâce à la formule de Vandermonde et au constat précédent, $BB^T = A$. En effet, soit $0 \leq i, j \leq n$:

$$[BB^T]_{i,j} = \sum_{h=0}^n \binom{i}{h} \binom{j}{h} = \sum_{h=0}^{\min(i,j)} \binom{i}{h} \binom{j}{h} = \binom{i+j}{\min(i,j)}$$

Donc $\det(A) = \det(B)^2$. Or, B est une matrice triangulaire inférieure dont les éléments diagonaux sont des 1. On en déduit que $\det(B) = 1$, et donc $\det(A) = 1$. $\square$

Exercice 34 [X/ENS]

- (1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $A = (i \wedge j)_{1 \leq i,j \leq n}$. Calculer $\det(A)$.
- (2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $B = (|D(i) \cap D(j)|)_{1 \leq i,j \leq n}$ avec $D(i)$ l'ensemble des diviseurs de i . Calculer $\det(B)$.

Corrigé proposé par J.J.T :

- (1) On commence par montrer le lemme suivant, très classique.

Lemme : On note $\varphi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ la fonction d'Euler : $\varphi(k) = \#\{1 \leq j \leq k, k \wedge j = 1\}$. Alors pour tout $n \geq 1$:

$$n = \sum_{d|n} \varphi(d)$$

Preuve : Il suffit de considérer l'ensemble $\left\{ \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1 \right\}$. Chaque élément peut s'écrire de façon unique a/d avec $a \wedge d = 1$, $1 \leq a \leq d$ et $d|n$ et de façon réciproque, chaque fraction de cette forme est un élément de $\left\{ \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1 \right\}$. On en tire que :

$$\# \left\{ \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1 \right\} = n = \sum_{d|n} \varphi(d)$$

Continuons. Soit $1 \leq i, j \leq n$. Alors :

$$[A]_{i,j} = i \wedge j = \sum_{d|i \wedge j} \varphi(d) = \sum_{d=1}^n \varphi(d) \mathbb{1}(d|i) \mathbb{1}(d|j)$$

D'après le lemme et l'équivalence $d|i$ et $d|j \iff d|i \wedge j$. On pose alors $B = (\mathbb{1}(i|j))_{1 \leq i,j \leq n}$ qui est triangulaire supérieure de diagonale à que des 1, donc de déterminant égal à 1, et on note $D = \text{Diag}(\varphi(1), \dots, \varphi(n))$. Alors, pour tout $1 \leq i, j \leq n$:

$$[B^T D B]_{i,j} = \sum_{d=1}^n \mathbb{1}(d|i) \left(\sum_{h=1}^n [D]_{d,h} \mathbb{1}(h|j) \right) = \sum_{d=1}^n \varphi(d) \mathbb{1}(d|i) \mathbb{1}(d|j) = [A]_{i,j}$$

$$\text{Donc } B^T D B = A \text{ et donc } \det(A) = \det(D) = \prod_{k=1}^n \varphi(k).$$

(2) Il suffit de remarquer que $B = \tilde{B}^T \tilde{B}$ avec $\tilde{B}$ la matrice de la question précédente. Donc $\det(B) = 1$.

La méthode montrée ici dans les deux exercices précédents est appelée la méthode de Smith. Il est très important de l'avoir vue au moins une fois dans sa vie...

Exercice 35 [X/ENS]

Soit $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continue et T -périodique, $a < b$ deux réels et $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer l'existence de la limite suivante avant de la calculer :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \phi(nt) \psi(t) dt$$

Corrigé proposé par J.J.T :

On va traiter le cas $\psi \equiv C \in \mathbb{R}$ dans un premier temps, puis conclure par la densité des fonctions en escalier dans l'espace des fonction continues $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$. On note $I_n(\psi)$ l'intégrale apparant dans la limite et on remarque que pour $n \geq 1$ la fonction $t \mapsto \phi(nt)$ est T/n périodique ; il serait donc judicieux de diviser le segment $[a, b]$ aussi bien que possible en parts égaux de longueurs T/n . On cherche donc le plus grand $k \geq 0$ tel que $a + kT/n \leq b$. Il faut donc choisir $k_n = \lfloor n(b-a)/T \rfloor$. On a alors :

$$I_n(\psi) = C \sum_{k=0}^{k_n-1} \int_{a+kT/n}^{a+(k+1)T/n} \phi(nt) dt + C \int_{k_n}^b \phi(nt) dt$$

Il est claire que le terme tout à gauche tends vers 0 car ϕ est bornée sur $\mathbb{R}$ car continue et T -périodique. Dans chaque intégrale apparant dans la somme, on effectue le changement de variables $u = nt$. Grâce à la périodicité de ϕ :

$$\forall 0 \leq k \leq k_n - 1, \int_{a+kT/n}^{a+(k+1)T/n} \phi(nt) dt = \frac{1}{n} \int_{na+kT}^{na+(k+1)T} \phi(s) ds = \frac{1}{n} \int_0^T \phi(s) ds$$

On en déduit que :

$$I_n = C \frac{k_n}{n} \int_0^T \phi(s) ds + o(1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{C(b-a)}{T} \int_0^T \phi(s) ds = \left(\frac{1}{T} \int_0^T \phi(s) ds \right) \left(\int_a^b \psi(s) ds \right)$$

Il est donc assez naturel de conjecturer que la limite va toujours valoir ce dernier résultat quelque soit ψ continue sur $[a, b]$. Pour le montrer, montrons d'abord le lemme suivant :

Lemme : L'ensemble des fonctions en escalier $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ pour la norme $\| \cdot \|_\infty$.

Preuve : Soit $\psi \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$. Le segment $[a, b]$ étant compact, d'après le théorème de Heine, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tel que pour tout $(x, y) \in [a, b]^2$, $|x - y| \leq \delta \implies |\psi(x) - \psi(y)| \leq \varepsilon$. On choisit alors une subdivision $\sigma_\varepsilon = ([x_k, x_{k+1}], t_k)_{0 \leq k \leq N-1}$ tel que $x_0 < \dots < x_N$, $x_k < t_k < x_{k+1}$ pour tout $1 \leq k \leq N-1$, $|x_{k+1} - x_k| \leq \delta$ et :

$$\bigcup_{k=0}^{N-1} [x_k, x_{k+1}] = [a, b]$$

Finalement, on pose $\psi_\varepsilon = \mathbb{1}_{\{x_N\}} + \sum_{k=0}^{N-1} \psi(t_k) \mathbb{1}_{]x_k, x_{k+1}[} + \psi(x_k) \mathbb{1}_{\{x_k\}}$

(Cette subdivision existe ; pour s'en convaincre, on pourrait construire la subdivision régulière comme à la démonstration précédente). Alors d'après nos remarques sur le théorème de Heine, $\|\psi_\varepsilon - \psi\|_\infty \leq \varepsilon$, d'où le résultat. $\square$

Montrons alors notre conjecture. Soit $\psi \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$. On reprend les notations du lemme : on a donc l'existence d'une fonction en escalier ψ_ε qui vérifie $\|\psi - \psi_\varepsilon\|_\infty \leq \varepsilon$. Or :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \phi(nt) \psi_\varepsilon(t) dt = \sum_{k=0}^{N-1} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \phi(nt) \psi(t_k) dt = \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{1}{T} \int_0^T \phi(s) ds \right) \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} \psi(t_k) ds \right)$$

Or, ce dernier vaut $\left(\frac{1}{T} \int_0^T \phi(s) ds \right) \left(\int_a^b \psi_\varepsilon(s) ds \right) = \ell(\psi_\varepsilon)$. Par inégalité triangulaire :

$$|I_n(\psi) - \ell(\psi)| \leq |I_n(\psi) - I_n(\psi_\varepsilon)| + |I_n(\psi_\varepsilon) - \ell(\psi_\varepsilon)| + |\ell(\psi_\varepsilon) - \ell(\psi)|$$

Or, par définition de ψ_ε , $|I_n(\psi) - I_n(\psi_\varepsilon)| \leq (b-a)\|\phi\|_\infty \varepsilon$. Pour n assez grand, $|I_n(\psi_\varepsilon) - \ell(\psi_\varepsilon)| \leq \varepsilon$ d'après ce qu'on vient de montrer, et par inégalité triangulaire :

$$|\ell(\psi_\varepsilon) - \ell(\psi)| \leq \left| \frac{1}{T} \int_0^T \phi(t) dt \right| (b-a)\varepsilon$$

En factorisant alors par ε on obtient le résultat voulu.

Exercice 36 [ENS]

Déterminer les valeurs d'adhérences des suites $(\cos(n))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(|\cos(n)|^n)_{n \in \mathbb{N}}$

Corrigé proposé par J.J.T :

La première suite est classique. On montre lemme suivant concernant les sous groupes additifs de $(\mathbb{R}, +)$.

Lemme : Soit $(G, +)$ un sous groupe de $(\mathbb{R}, +)$. On pose $\alpha = \inf(G \cap \mathbb{R}_+^*)$. Si $\alpha > 0$, alors $G = \alpha\mathbb{Z}$. Si $\alpha = 0$, alors G est dense dans $\mathbb{R}$.

Preuve : Posons en effet $\alpha = \inf(G \cap \mathbb{R}_+^*)$. On suppose que $\alpha > 0$. Si $\alpha \notin G$, alors il existe une infinité d'éléments de G entre α et 2α . Parmi eux, prenons g et h avec $g < h$. On a $h - g \in G$, or $\alpha > h - g > 0$, ce qui contredit le principe de la borne inférieure. Donc on a nécessairement $\alpha \in G$.

Ainsi, $\alpha\mathbb{Z} \subset G$. Or, si l'on suppose qu'il existe $g \in G \cap \mathbb{R}_+^*$ tel qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $k\alpha < g < (k+1)\alpha$, on obtient $0 < g - k\alpha < \alpha$ avec $g - k\alpha \in G$, ce qui contredit à nouveau le principe de la borne inférieure. On peut obtenir la même contradiction pour g négatif.

Ainsi, on a montré, dans le cas où $\alpha = \inf(G \cap \mathbb{R}_+^*) > 0$, que $G = \alpha\mathbb{Z}$.

Supposons maintenant que $\inf(G \cap \mathbb{R}_+^*) = 0$. Considérons alors deux réels $0 < x < y$ (les bornes de notre I). Puisque $y - x > 0$, il existe $g \in G$ tel que $0 < g < y - x$ (d'après l'hypothèse de départ). Comme vu dans la question 1, on peut ainsi déterminer $k \in \mathbb{N}$ tel que $x < kg < y$ avec $kg \in G$.

On a donc montré que l'on peut loger un élément de g dans tout intervalle ouvert de $\mathbb{R}_+^*$. Puisque $0 \in G$ et que, par passage à l'opposé, on obtient le même résultat sur $\mathbb{R}_-^*$, on en déduit que G est dense dans $\mathbb{R}$. $\square$

Poursuivons. Par 2π -périodicité et parité, on a $\{\cos(n), n \in \mathbb{N}\} = \cos(\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z})$. Or, $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$. Supposons-le monogène de la forme $\alpha\mathbb{Z}$. On aurait :

$$\exists n, m \in \mathbb{Z}, n \neq m, \quad 2\pi = n\alpha \text{ et } 1 + 2\pi = m\alpha$$

D'où $m\alpha - 1 = n\alpha \iff \alpha = 1/(m - n) \implies \pi = n/2(m - n) \in \mathbb{Q}$, ce qui est absurde. Ainsi, $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Puisque $\cos$ est une fonction continue surjective de $\mathbb{R}$ dans $[-1, 1]$, $\{\cos(n), n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1, 1]$. Or, ce dernier n'admet pas de point isolé, donc on en déduit que cet ensemble est également l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(\cos(n))_{n \in \mathbb{N}}$.

La deuxième partie est beaucoup plus difficile. Il faut d'abord montrer le lemme d'approximation diophantienne :

Lemme : Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Il existe alors une infinité de rationnels $p/q \in \mathbb{Q}$ vérifiant :

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q^2}$$

Preuve : Soit $N \geq 1$. On note $\{x\}$ la partie décimale de x . On considère $X = (0, \{\alpha\}, \{2\alpha\}, \dots, \{N\alpha\}) \in [0, 1]^{N+1}$. On peut écrire :

$$[0, 1] = \bigcup_{k=0}^{N-1} \left[\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N} \right]$$

Et donc par un lemme des tiroirs, puisque X admet $N + 1$ coordonnées et l'écriture au dessus est de la forme de N intervalles de longueur $1/N$, il existe deux indices $(i, j) \in \llbracket 0, N \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$ tels que $|\{\alpha i\} - \{\alpha j\}| \leq 1/N$. On note alors $q = |i - j| \leq N$, $p = \lfloor \alpha q \rfloor$, on a bien :

$$|\alpha q - p| \leq \frac{1}{N} \implies \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q^2}$$

Pour montrer qu'il y a une infinité de tels termes, la dernière différence au dessus est non nulle car $\alpha \notin \mathbb{Q}$, donc en reprenant la démonstration avec N assez grand on trouve un nouveau rationnel qui satisfait la condition. $\square$

On utilise ce lemme de la manière suivante. On admet que 2π est un réel irrationnel ; par infinitude du lemme précédent, on a l'existence de deux suites $(p_n, q_n) \in (\mathbb{N}^2)^{\mathbb{N}}$ strictement croissantes tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|p_n - 2\pi q_n| \leq \frac{1}{q_n}$$

En notant $\varepsilon_n = p_n - 2\pi q_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{p_n}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{q_n}\right)$, on va chercher à construire une suite qui tends vers n'importe quelle élément de $]0, 1[$. En effet, soit $(r_n) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ une suite qu'on cherchera à déterminer plus tard. Alors :

$$\cos(r_n p_n)^{r_n p_n} = \cos(\varepsilon_n r_n)^{r_n p_n}$$

Par 2π périodicité. Si on construit r_n de telle sorte que $r_n \varepsilon_n = o(1)$, on a :

$$\ln(\cos(\varepsilon_n r_n)^{r_n p_n}) = \frac{1}{2} r_n p_n \ln(1 - \sin^2(\varepsilon_n r_n)) \sim -\frac{r_n^3 \varepsilon_n^2 p_n}{2}$$

Ceci nous incite à construire (r_n) de telle sorte que cette dernière quantité converge. Pour $a > 0$, posons alors $r_n = \lfloor a\varepsilon^{-2/3}p_n^{-1} \rfloor$. Alors (r_n) tends vers l'infini car $\varepsilon_n^2 p_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{p_n}\right)$ et $\varepsilon_n r_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. On en déduit que :

$$\cos(r_n p_n)^{r_n p_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-a/2}$$

Puisque le choix de $a > 0$ est arbitraire, on en déduit que $]0, 1[$ est inclus dans l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(|\cos(n)|^n)_{n \in \mathbb{N}}$ noté V . Or, on a les inclusions $]0, 1[\subset V \subset [0, 1]$ et puisque V est fermé, on en déduit que $V = [0, 1]$.

Exercice 37 [ENS]

Soit (O_n) une suite d'ouverts non bornés de $\mathbb{R}_+^*$. Montrer qu'il existe $x > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x\mathbb{N} \cap O_n$ soit infini.

Corrigé proposé par J.J.T :

Pour cet exercice il va falloir mobiliser le lemme de Baire, dont l'énoncé et la preuve ont déjà été mobilisés à l'exercice 16. Revenons à l'exercice. Pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, on va poser :

$$U_{n,m} = \bigcup_{k \geq m+1} \{x \in \mathbb{R}_+^*, kx \in O_n\} = \bigcup_{k \geq m+1} \frac{1}{k} O_n$$

Alors $(U_{n,m})_{(n,m) \in \mathbb{N}^2}$ constitue une famille d'ouverts denses de $\mathbb{R}_+^*$. En effet, soit J un ouvert de $\mathbb{R}_+^*$ et fixons $n \in \mathbb{N}$. Quitte à raisonner sur l'intérieur de ses composantes connexes, supposons que J soit un intervalle ouvert. Alors la suite $(kJ \cap \mathbb{R}_+^*)_{k \in \mathbb{N}}$ constitue une suite d'intervalles ouverts croissante recouvrant l'entiereté de $\mathbb{R}_+^*$, et donc rencontre O_n lorsque k est suffisamment grand, et cette intersection reste non vide pour tout $k' \geq k$. Ainsi, quel que soit $m \in \mathbb{N}$, il existe un $k \geq m+1$ tel que $kJ \cap O_n \neq \emptyset$, d'où la densité.

On peut alors appliquer le lemme de Baire, en prenant l'intersection dénombrable :

$$\Omega = \bigcap_{(n,m) \in \mathbb{N}^2} U_{n,m} = \{x > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, \exists k \geq m+1, xk \in O_n\}$$

Ω est dense dans $\mathbb{R}_+$ car $\mathbb{R}_+$ muni de la distance $d(x, y) = |x - y|$ est un espace métrique complet, donc en particulier non vide, d'où le résultat attendu, en prenant un $x > 0$ de Ω .

2. MINES-PONTS

Exercice 1

On considère $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ et on introduit $\Phi_{A,B}$ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ défini par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \Phi_{A,B}(M) = AMB$$

- 1) Montrer que si A et B sont diagonalisables, alors $\Phi_{A,B}$ est diagonalisable.
- 2) On suppose ici que $\Phi_{A,B}$ est diagonalisable et non nul.
 - a. Montrer que B^T admet une valeur propre non nulle notée λ .
 - b. Soit $Y \in E_\lambda(B^T)$. En étudiant l'application f définie par $f(X) = XY^T$ pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, montrer que A est diagonalisable.
 - c. Que dire alors de B ? Que peut-on en conclure?

- (1) On pose $(X_1, \dots, X_n)$ et $(Y_1, \dots, Y_n)$ deux bases de $\mathbb{R}^n$ respectivement constituées de vecteurs propres de A et de B^T . On associe les $(X_i)_{i \in \mathbb{N}_n}$ aux valeurs propres $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}_n} = Sp_{\mathbb{C}}(A)$ et les $(Y_j)_{j \in \mathbb{N}_n}$ aux valeurs propres $(\mu_j)_{j \in \mathbb{N}_n} = Sp_{\mathbb{C}}(B)$ (une matrice et sa transposée ont même spectre).

Nous allons construire une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ constituée de vecteurs propres (qui seront en fait des matrices propres) de $\Phi_{A,B}$. Pour ce faire, remarquons que pour $(i, j) \in \mathbb{N}_n^2$, on a :

$$\Phi_{A,B}(X_i Y_j^T) = A X_i Y_j^T B = (A X_i)(B^T Y_j)^T = \lambda_i \mu_j X_i Y_j^T$$

Ainsi, pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}_n^2$, $X_i Y_j^T$ est un vecteur propre de $\Phi_{A,B}$ associé à la valeur propre $\lambda_i \mu_j$. De plus, puisque l'on considère bien évidemment des vecteurs propres non nuls, ceux ainsi construits sont non nuls. Puisqu'ils sont au nombre de n^2 il suffit maintenant de montrer qu'ils forment une famille libre.

On considère donc $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont les coefficients $(c_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}_n^2}$ forment une famille de complexes vérifiant :

$$\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}_n^2} c_{ij} X_i Y_j^T = 0_n$$

Or, si l'on note y_{jk} le k -ième coefficient du j -ième vecteur Y_j , il suffit d'identifier la k -ième colonne de ces deux matrices dans cette égalité pour obtenir :

$$\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}_n^2} c_{ij} y_{jk} X_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n c_{ij} y_{jk} \right) X_i = 0_{n,1}$$

Par liberté de la famille $(X_i)_{i \in \mathbb{N}_n}$, on obtient :

$$\forall k \in \mathbb{N}_n, \forall i \in \mathbb{N}_n, \sum_{j=1}^n c_{ij} y_{jk} = 0$$

Finalement, on obtient :

$$\forall i \in \mathbb{N}_n, \sum_{j=1}^n c_{ij} Y_j^T = 0_{1,n}$$

À nouveau par liberté de la famille $(Y_j)_{j \in \mathbb{N}_n}$ (donc celle de la famille transposée) on obtient :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}_n^2, c_{ij} = 0$$

Finalement, on obtient la liberté de $(X_i Y_j^T)_{(i,j) \in \mathbb{N}_n^2}$. On a donc pu construire une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ constituée de vecteurs propres de $\Phi_{A,B}$, qui est alors bien diagonalisable.

(2) a. Supposons que $Sp_{\mathbb{C}}(B^T) = Sp_{\mathbb{C}}(B) = \{0\}$, donc que B est nilpotente. On a alors :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \Phi_{A,B}^n(M) = A^n M B^n = 0_n$$

Ainsi, $\Phi_{A,B}$ est nilpotent. Puisqu'on le suppose diagonalisable, il est nul, or on suppose le contraire. Ainsi, B^T doit nécessairement admettre une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

b. L'application $f : X \mapsto XY^T$ est une application linéaire de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Remarquons d'une part une chose intéressante sur la composition $\Phi_{A,B} \circ f$:

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}), \Phi_{A,B}(f(X)) = AXY^T B = AX(B^T Y)^T = \lambda AXY^T$$

Ainsi, seul A demeure dans le calcul de $\Phi_{A,B} \circ f$, et apparaissent notamment les vecteurs AX . Puisque nous cherchons à diagonaliser A , nous cherchons une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ composée de ses vecteurs propres. Si toutefois nous trouvons une base $(X_i)_{i \in \mathbb{N}_n}$ telle que $f(X_i)$ est un vecteur propre de $\Phi_{A,B}$ associé à la valeur propre μ_i pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, on aura :

$$\forall i \in \mathbb{N}_n, \Phi_{A,B}(f(X_i)) = \lambda A X_i Y^T = \mu_i X_i Y^T$$

Finalement, puisque $\lambda \neq 0$ on aurait :

$$\forall i \in \mathbb{N}_n, A X_i Y^T = \frac{\mu_i}{\lambda} X_i Y^T$$

Puisque l'on prend aussi $Y \neq 0$, on pose $j \in \mathbb{N}_n$ un indice tel que le j -ième coefficient de Y , noté y_j , est non nul et on identifie la j -ième colonne de ces deux matrices :

$$\forall i \in \mathbb{N}_n, y_j A X_i = y_j \frac{\mu_i}{\lambda} X_i \iff \forall i \in \mathbb{N}_n, A X_i = \frac{\mu_i}{\lambda} X_i$$

Ainsi, si une telle base existe, il s'agit bien d'une base composée de vecteurs propres de A . Il suffit alors de montrer qu'elle existe bel et bien.

Or, $\Phi_{A,B}$ est diagonalisable, donc il existe une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ composée de vecteurs propres de $\Phi_{A,B}$. L'image de f quant à elle est de dimension n . En effet, ses vecteurs de base sont les n matrices dont la k -ième a pour k -ième ligne Y^T et $0_{1,n}$ pour les autres (leurs antécédents respectifs par f sont les vecteurs dont le k -ième coefficient vaut 1 et dont les autres sont nuls).

Exercice 2

On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la somme $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

Démontrer la convergence et calculer la somme de la série $\sum_{k \geq 1} \frac{H_k}{k(k+1)(k+2)}$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right)$$

Pour faire apparaître une forme télescopique de notre terme général, on écrit :

$$\frac{H_k}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{H_k}{k(k+1)} - \frac{H_k}{(k+1)(k+2)} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{H_k}{k(k+1)} - \frac{H_{k+1}}{(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(k+1)^2(k+2)} \right)$$

On a donc un terme télescopique d'une part et d'autre part le terme suivant :

$$\frac{1}{(k+1)^2(k+2)} = \frac{1}{(k+1)^2} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{(k+1)^2} - \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right)$$

On a à nouveau un terme télescopique et le terme général d'une série bien connue. En traitant un à un ces termes, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 1} \left(\frac{H_k}{k(k+1)} - \frac{H_{k+1}}{(k+1)(k+2)} \right) &\sim -\frac{H_k}{k(k+1)} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0 \text{ et } \frac{H_1}{1(1+1)} = \frac{1}{2} \\ \sum_{k \geq 1} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) &\sim -\frac{1}{k+1} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0 \text{ et } \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \\ \sum_{k \geq 1} \frac{1}{(k+1)^2} &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} - 1 = \frac{\pi^2}{6} - 1 \end{aligned}$$

On a donc décomposé notre terme général en différents termes généraux de séries convergentes. Ainsi, notre série converge vers la somme des limites des séries exhibées :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{H_k}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{6} - 1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}$$

□

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que ses coefficients sont soit 0 soit 1. Quelle est la probabilité que M soit inversible ? Montrer que la limite lorsque n tend vers l'infini de cette probabilité est majorée par $1/e$.

Solution proposée par J.J.T : Montrons le résultat plus général, qui va nous débloquer la question :

Lemme : Soit p un nombre premier, $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, qui est un corps. Alors :

$$|\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)| = \prod_{k=0}^{n-1} (p^n - p^k)$$

Preuve : Il suffit de raisonner en termes des colonnes : on va construire une matrice à coefficients dans $\mathbb{F}_p$ colonne par colonne. Pour la première, on peut tout mettre sauf le vecteur nul ; il y a donc $p^n - 1$ choix. Pour la deuxième, tout ce qui n'est pas dans l'espace vectoriel engendré par la première colonne est permis : il y a $p^n - p$ choix. On continue de cette manière jusqu'à ce qu'il nous reste $p^n - p^{n-1}$ choix pour la dernière colonne, d'où le résultat. □

En appliquant ce lemme au cas $p = 2$, on en déduit que notre probabilité, que l'on notera p_n , vaut :

$$p_n = \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{2^{n-k}} \right) = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{2^k} \right)$$

En prenant le logarithme et l'inégalité classique $\ln(1+x) \leq x$ valable pour tout $x > -1$, on obtient :

$$\ln(p_n) = \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(1 - \frac{1}{2^k}\right) \leq -\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k}$$

En prenant la limite et par continuité de $\ln$, on en tire que $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n \leq \frac{1}{e}$. $\square$

Exercice 4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- (1) Montrer que si A et B sont deux matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent, alors elles le sont dans une même base.
- (2) En déduire que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ commute avec sa transposée conjuguée, alors A est diagonalisable dans une base orthonormée.

Exercice 5

Soit (a_n) une suite complexe vérifiant $a_n = o(1/n)$ au voisinage de $+\infty$. On pose pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Justifier l'existence de f , et montrer que :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left(f\left(1 - \frac{1}{p}\right) - \sum_{k=0}^p a_k \right) = 0$$

Que peut-on en déduire ?

Le rayon de convergence de la série entière $\left(\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}\right)$ est 1, et puisque $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ on en déduit que le rayon de convergence de $\left(\sum_{n \geq 0} a_n x^n\right)$ est ≥ 1 , d'où l'existence de f . Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq N$ on a $|a_n| \leq \varepsilon/n$. Soit donc $p \geq N$. On a alors :

$$\left| f\left(1 - \frac{1}{p}\right) - \sum_{k=0}^p a_k \right| \leq \sum_{k=1}^p |a_k| \left(1 - \left(1 - \frac{1}{p}\right)^k\right) + \varepsilon \sum_{k=p+1}^{+\infty} \frac{1}{k} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^k$$

D'abord, $\sum_{k=p+1}^{+\infty} \frac{1}{k} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^k \leq \frac{p}{p+1} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{p+1} = \mathcal{O}(1)$ au voisinage de l'infini. De plus, on a l'inégalité classique de Bernoulli :

$$\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \left(1 - \frac{1}{p}\right)^k \geq 1 - \frac{k}{p} \implies 1 - \left(1 - \frac{1}{p}\right)^k \leq \frac{k}{p}$$

On a donc l'existence d'une constante $M > 0$ telle que :

$$\left| f\left(1 - \frac{1}{p}\right) - \sum_{k=0}^p a_k \right| \leq \varepsilon M + \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p |a_k| k$$

La suite $(|a_k|k)$ tend vers 0 par hypothèse. Il faut donc montrer le lemme de Cesàro pour conclure, et puis prendre la limite lorsque $p \rightarrow \infty$.

On en déduit notamment que si $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ existe, alors la série $\left(\sum_{n \geq 0} a_n\right)$ converge, et sa somme vaut $f(1)$. $\square$

Exercice 6

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continue et $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$.

(1) Soit $a < b$ et $c < d$ quatre réels. Montrer que :

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dy \, dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) \, dx \, dy$$

(2) En déduire le théorème de Schwarz dans le cas $\mathcal{C}^2$: pour tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$$

(1) Pour $x \in [a, b]$, on pose $h(x) = \int_c^d f(x, y) \, dy$. Alors h est continue. En effet :

- Pour tout $y \in [c, d]$, $x \mapsto f(x, y)$ est continue car f l'est.
- Pour tout $x \in [a, b]$, $y \mapsto f(x, y)$ est L^1 , continue par morceaux (car continue).
- $[a, b] \times [c, d]$ est un compact de $\mathbb{R}^2$ et donc par le théorème de Weierstrass f est bornée sur ce dernier, donc on a une domination intégrable (une constante) sur ce dernier.

Donc d'après le théorème de convergence dominée, h est continue. Regardons alors ce qui se passe lorsqu'on intègre h ; h étant continue, on peut utiliser la définition des intégrales de Riemann :

$$\int_a^b h(x) \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} h\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_c^d \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}, y\right) \, dy$$

On pose alors pour tout $n \geq 1$, $f_n(y) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}, y\right)$. Il est clair que $f_n(y)$

converge simplement vers $\int_a^b f(x, y) \, dx$ pour tout $y \in [c, d]$, tout en restant L^1 par les mêmes arguments que précédemment.

Pour la domination, il suffit de remarquer que $|f_n(y)| \leq (b-a)\|f\|_\infty$, avec ici la norme infinie prise sur le compact $[a, b] \times [c, d]$. D'après le théorème de convergence dominée, on a alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_c^d f_n(y) \, dy = \int_c^d \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(y) \, dy \iff \int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dy \, dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) \, dx \, dy$$

$\square$

(2) On pose $\phi(x, y) = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x, y) - \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x, y)$ et on suppose qu'il existe un point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ qui vérifie $\phi(x_0, y_0) \neq 0$. Quitte à considérer $-\phi$, on peut supposer sans perte de généralité que $\phi(x_0, y_0) > 0$. Par continuité de ϕ , il existe un voisinage ouvert de (x_0, y_0) sur lequel $\phi > 0$. Quitte à le rétrécir, on peut supposer que $\phi > 0$ sur un compact $K = [a, b] \times [c, d]$ avec $(x_0, y_0) \in K$.

Cela impliquerait donc que :

$$\iint_K \phi(x, y) \, dx \, dy > 0$$

Mais d'après la question précédente, cette intégrale vaut 0 (à calculer), d'où l'absurdité. ϕ est donc identiquement nulle.

Exercice 7

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et intégrable. Montrer que :

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) e^{i\Lambda t} \, dt \xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} 0$$

C'est horrible de recevoir ça aux Mines. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque f est intégrable sur $\mathbb{R}$, il existe un compact $K \subset \mathbb{R}$ de la forme $K = [-R, R]$ avec $R > 0$ tel que :

$$\left| \int_{\mathbb{R} \setminus K} f(t) e^{i\Lambda t} \, dt \right| \leq \int_{\mathbb{R} \setminus K} |f(t)| \, dt \leq \varepsilon/2$$

On se ramène donc à l'étude de l'intégrale en question sur le compact $[-R, R]$. Montrons d'abord un lemme classique qui nous sera utile.

Lemme : Soit $f : [-R, R] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Alors :

$$\int_{-R}^R f(t) e^{i\Lambda t} \, dt \xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} 0$$

Preuve : Il suffit de faire une intégration par parties et de remarquer que f' est bornée car continue sur le compact $[-R, R]$. On note désormais la norme infinie comme le sup du module sur ce dernier.

$$\left| \int_{-R}^R f(t) e^{i\Lambda t} \, dt \right| = \left| \left[\frac{f(t) e^{i\Lambda t}}{i\Lambda} \right]_{-R}^R + \frac{i}{\Lambda} \int_{-R}^R f'(t) e^{i\Lambda t} \, dt \right| \leq 2(\|f\|_{\infty} + R\|f'\|_{\infty}) \frac{1}{\Lambda} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda}\right)$$

D'où le résultat. Revenons à notre cas ; d'après le théorème de Weierstrass, il existe une suite de polynômes $(P_n) \in \mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers f sur $[-R, R]$. Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\|f - P_n\|_{\infty} \leq \varepsilon/4R$. On en tire que, pour tout $n \geq N$:

$$\left| \int_{-R}^R f(t) e^{i\Lambda t} \, dt \right| \leq \int_{-R}^R |f(t) - P_n(t)| \, dt + \left| \int_{-R}^R P_n(t) e^{i\Lambda t} \, dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda}\right)$$

Car les polynômes sont tous de classe $\mathcal{C}^1$ et donc le lemme s'applique. En reprenant la limite, on conclut que pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \left| \int_{-R}^R f(t) e^{i\Lambda t} \, dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Ainsi, $\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{i\Lambda t} \, dt = 0$. □

Exercice 8

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Existe-t-il toujours un $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $P - \lambda$ est scindé à racines simples ?

On va raisonner par l'absurde. Supposons que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $P - \lambda$ ait une racine double que l'on note $\mu(\lambda)$. Alors $\mu(\lambda)$ est aussi racine de P' . Ainsi, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, il existe un $\mu(\lambda)$ racine de P' vérifiant $P(\mu(\lambda)) = \lambda$. En notant $Z_{\mathbb{C}}(P')$ l'ensemble des racines de P' , qui est un ensemble fini, on a alors $P(Z_{\mathbb{C}}(P')) = \mathbb{C}$, ce qui est évidemment absurde. $\square$

Exercice 9

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné de bord $\partial\Omega$, $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ tel que $\Delta u > 0$ sur Ω .

(1) Montrer que :

$$\sup_{x \in \Omega} u(x) = \sup_{x \in \partial\Omega} u(x)$$

(2) Le résultat subsiste-t-il si on suppose que $\Delta u \geq 0$?

(3) Soit $f \in \mathcal{C}^0(\partial\Omega)$. On considère l'équation aux dérivées partielles suivante, appelée équation de Laplace :

$$\Delta u(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \Omega \\ f(x) & \text{si } x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Montrer que cette équation admet au plus une unique solution.

(1) u est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω . Supposons que le supremum est atteint à l'intérieur de Ω en un point $x_0 \in \Omega$. Alors au voisinage de x_0 :

$$u(x) = u(x_0) + \langle \nabla u(x_0), x - x_0 \rangle + \langle \text{Hess}_u(x_0)(x - x_0), (x - x_0) \rangle + o(\|x - x_0\|^2)$$

Or, puisqu'il s'agit d'un maximum, $\nabla u(x_0) = 0$. Puisque $\Delta u(x_0) = \text{Tr}(\text{Hess}_u(x_0)) > 0$ et $\text{Hess}_u(x_0) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, ce dernier admet une valeur propre $\lambda > 0$. Soit v un vecteur propre unitaire associé à cette valeur propre. Alors, pour t assez petit pour que $x_0 + tv \in \Omega$, on a :

$$u(x_0 + tv) = u(x_0) + \lambda t^2 \|v\|^2 + o(t^2)$$

Soit $\delta > 0$. Il existe un $r > 0$ tel que pour tout $0 \leq t < r$, $|u(x_0 + tv) - u(x_0) - \lambda t^2| \leq \delta t^2$. Ainsi, on a l'encadrement :

$$(\lambda - \delta)t^2 \leq u(x_0 + tv) - u(x_0) \leq (\lambda + \delta)t^2$$

En prenant $\delta < \lambda$, on conclut qu'il existe un $t > 0$ tel que $u(x_0 + tv) - u(x_0) > 0$ et $x_0 + tv \in \Omega$. Le sup n'est donc pas atteint à l'intérieur. $\overline{\Omega}$ est compact car fermé borné en dimension finie, donc u atteint son maximum dessus mais pas à l'intérieur ; on en déduit le résultat demandé. $\square$

(2) Soit $\varepsilon > 0$. On suppose que $\Delta u \geq 0$, et on pose $u_\varepsilon = u + \varepsilon P(x_1, \dots, x_n)$, avec $P(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n x_i^2$. Alors $\Delta u_\varepsilon \geq \varepsilon > 0$ et donc :

$$\sup_{x \in \Omega} (u(x)) + \varepsilon = \sup_{x \in \Omega} u_\varepsilon(x) = \sup_{x \in \partial\Omega} u_\varepsilon(x) = \sup_{x \in \partial\Omega} (u(x)) + \varepsilon$$

On en déduit le résultat en laissant tendre $\varepsilon \rightarrow 0$. $\square$

- (3) Supposons que l'équation admet deux solutions u_1 et u_2 . On pose $g(x) = u_1(x) - u_2(x)$. Alors g vérifie les hypothèses de la question 2 ; on en déduit que $g \leq 0$ sur Ω . Mais $-g$ vérifie également les mêmes hypothèses. Donc $g \geq 0$. On en tire que $g = 0$ sur Ω et donc sur $\overline{\Omega}$ par continuité. Donc si une telle solution existe, elle est unique. $\square$

Exercice 10

Soit $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Calculer le déterminant :

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & \dots & a_0 \end{vmatrix}$$

C'est un classique ! On pose $J \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice suivante :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Alors, en posant $Q(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, on remarque que le déterminant en question est le déterminant

de la matrice $Q(J)$. On remarque également que $J^{n+1} - I_{n+1} = O_{n+1}$. Donc J est diagonalisable, car annulé par le polynôme unitaire $X^{n+1} - 1$. Ce polynôme est de degré $n+1$, est unitaire et annule J ; on en déduit que c'est son polynôme caractéristique, et en notant $\omega = \exp(2\pi i/n+1)$ on en tire que son spectre est $\text{Sp}(J) = \{1, \omega, \dots, \omega^n\}$. Ainsi, il existe une matrice inversible P telle que $J = PDP^{-1}$, avec $D = \text{diag}(1, \omega, \dots, \omega^n)$. On en tire que :

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & \dots & a_0 \end{vmatrix} = \det(\text{Diag}(Q(1), Q(\omega), \dots, Q(\omega^n))) = \prod_{k=0}^n Q(\omega^k)$$

$\square$

Exercice 11

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq r \leq n$. Montrer que l'ensemble des matrices réelles de rang $\leq r$ est fermé.

Corrigé proposé par J.J.T :

C'est un exercice qui oblige les étudiants à connaître leurs caractérisations du rang ! Il faut se souvenir que le rang d'une matrice, c'est la taille de la plus grande sous-matrice inversible. On va utiliser cette définition pour pouvoir conclure. En effet, supposons que l'ensemble des matrices de rang $\leq r$ n'est pas fermé. Il existe donc une suite de matrices $(M_p)_{p \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ de rang tous inférieur à r qui converge vers une matrice M de rang $d = \text{rg}(M) > r$. Notons M^d une sous-matrice de M telle que $M^d \in \text{GL}_d(\mathbb{R})$, et pour tout $p \in \mathbb{N}$, M_p^d la sous-matrice correspondante à M_p , de telle façon que $M_p^d \xrightarrow{p \rightarrow \infty} M^d$. $\text{GL}_d(\mathbb{R})$ étant ouvert (l'image réciproque de $\mathbb{R}^*$ par le déterminant, qui est continu), il existe un rang $p_0 \in \mathbb{N}$ après lequel pour tout $p \geq p_0$, $M_p^d \in \text{GL}_d(\mathbb{R})$, ce qui est absurde car d'après la caractérisation du rang avec les sous-matrices, cela impliquerait que $\text{rg}(M_p) = d > r$ après un certain rang, ce qui contredit les hypothèses. Ainsi, l'ensemble des matrices de rang $\leq r$ est bien un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 12

On note $\varphi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ la fonction d'Euler qui à k associe le cardinal de $\left(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}\right)^\times$, le groupe des inversibles du groupe quotient $\left(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}, +\right)$.

- (1) Montrer que $\varphi(k) = |\{1 \leq j \leq k, j \wedge k = 1\}|$.
- (2) On fixe $n \in \mathbb{N}^*$, $X \hookrightarrow \mathcal{U}([1, n])$ une variable aléatoire suivant une loi uniforme. En calculant la probabilité $\mathbb{P}(X \wedge n = 1)$ de deux manières différentes, montrer que :

$$\varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

Avec le produit portant sur les nombres premiers qui divisent n .

- (3) On admet que la série des $1/p$ avec p premier diverge. En déduire que la suite $\left(\frac{\varphi(n)}{n}\right)_{n \geq 1}$ est dense dans $[0, 1]$.

Corrigé proposé par J.J.T :

- (1) Montrons que $j \in \left(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}\right)^\times$ si et seulement si $j \wedge k = 1$. Si $j \wedge k = 1$, d'après Bézout il existe des entiers $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $ju + kv = 1$, donc $ju \equiv 1[k]$. On a raisonné par équivalence, donc on a bien le résultat.
- (2) Un raisonnement direct par cardinal nous donne un premier résultat :

$$\mathbb{P}(X \wedge n = 1) = \frac{|\{1 \leq j \leq n, j \wedge n = 1\}|}{n} = \frac{\varphi(n)}{n}$$

Dans un deuxième temps, en notant $A_p = (p|X)$ pour tout p premier qui divise n , il est clair avec le lemme de Gauss que ces événements constituent une famille d'événements mutuellement indépendants. On peut alors écrire l'événement de la manière suivante :

$$(X \wedge n = 1) = \bigcap_{p|n} \overline{A_p} \implies \mathbb{P}(X \wedge n = 1) = \prod_{p|n} (1 - \mathbb{P}(A_p)) = \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

D'où le résultat. □

- (3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a établi que :

$$\frac{\varphi(n)}{n} = \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

On n'a donc besoin de considérer que l'ensemble des entiers sans facteur carré $\mathcal{Q} = \{n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in \mathcal{P}, v_p(n) \leq 1\}$. Montrons alors le lemme suivant qui va tout nous débloquent.

Lemme : Soit $A = (a_n) \in]0, 1[^\mathbb{N}$ une suite strictement croissante tendant vers 1 telle que la suite $(1 - a_n)_{n \in \mathbb{N}} \notin \ell^1(\mathbb{N})$. Alors l'ensemble :

$$E(A) = \left\{ \prod_{i \in I} a_i, I \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N}) \right\}$$

Est dense dans $[0, 1]$, avec $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$.

Preuve : 1 est valeur d'adhérence de (a_n) donc on n'a pas à le considérer. 0 est également dans l'adhérence de $E(A)$. En effet :

$$\ln \left(\prod_{k=1}^n a_k \right) = \sum_{k=1}^n \ln(a_k) \leq \sum_{k=1}^n (a_k - 1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$$

Donc par continuité du logarithme, $0 \in \overline{E(A)}$. Supposons qu'il existe un $\delta > 0$ et un $x \in]0, 1[$ tels que $I_\delta =]x - \delta, x + \delta[\cap \overline{E(A)} = \emptyset$. Quitte à rétrécir δ , on peut également supposer que $I_\delta \subset]0, 1[$. Par hypothèse, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $a_N \geq x + \delta$ et pour tout $n \geq N$, $|1 - a_n| < \delta$. On pose alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \prod_{k=N}^{N+n} a_k \in E(A)$$

Alors pour tout $n \geq N$, $|v_n - v_{n+1}| = v_n |1 - a_{n+1}| < \delta$. De plus, grâce à ce qu'on vient de montrer, (v_n) tend vers 0. On a donc exhibé une suite décroissante qui va balayer $]0, a_N]$ telle que la différence de deux termes successifs est strictement inférieure à δ .

On note $n_0 = \max_{n \geq 0} \{v_n \geq x + \delta\}$. $n_0 < +\infty$ car (v_n) tend vers 0. Or, par décroissance stricte de la suite (v_n) et par hypothèse sur x et δ :

$$v_{n_0+1} < x - \delta < x + \delta < v_{n_0}$$

Donc $2\delta < |v_{n_0} - v_{n_0+1}| < \delta$ ce qui est absurde. □

On remarque donc que la suite $\left(\frac{\varphi(n)}{n}\right)$ décrit exactement l'ensemble :

$$\Phi = \left\{ \prod_{p|q} \left(1 - \frac{1}{p}\right), q \in \mathcal{Q} \right\}$$

Et que la construction de la démonstration précédente nous permet de trouver une sous-suite qui converge vers n'importe quel élément de $[0, 1]$ car la suite $\left(a_p = \left(1 - \frac{1}{p}\right)\right)$ satisfait les conditions du lemme. □

Exercice 13

Soit $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$, et $n \geq 1$. On note $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisables.

- (1) Soit $(A, B) \in \mathbb{C}[X]^2$ tels que $\deg(A) = p$ et $\deg(B) = q$. Montrer que $\phi_{A,B} : \mathbb{C}_{q-1}[X] \times \mathbb{C}_{p-1}[X] \rightarrow \mathbb{C}_{p+q-1}[X]$, $(U, V) \mapsto AU + BV$ est un isomorphisme si et seulement si A et B sont premiers entre eux.
- (2) En déduire que l'ensemble des polynômes de $\mathbb{C}_n[X]$ scindés à racines simples est un ouvert de $\mathbb{C}_n[X]$ pour $n \geq 0$.
- (3) Déterminer l'intérieur de $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$.

Corrigé proposé par J.J.T :

- (1) Remarquons que les deux espaces ont la même dimension et que $\phi_{A,B}$ est trivialement une application linéaire entre ces deux espaces. Il suffit donc de montrer que le noyau de $\phi_{A,B}$ est réduit à $\{0\}$ si et seulement si A et B sont premiers entre eux. Supposons que le noyau ne soit pas réduit à $\{0\}$. Alors il existe un couple de polynômes $(U, V) \neq (0, 0)$ vérifiant $\deg(U) \leq q-1$ et $\deg(V) \leq p-1$ tel que $AU = BV$. On en déduit que $B|AU$. Si on suppose que A et B sont alors premiers entre eux, par le lemme de Gauss $B|U$ et donc $\deg(U) \geq q$, ce qui est absurde. Donc par contraposée, si A et B sont premiers entre eux $\phi_{A,B}$ est un isomorphisme. Réciproquement, supposons que $\phi_{A,B}$ est un isomorphisme. Alors il existe un couple $(U, V) \in \mathbb{C}_{q-1}[X] \times \mathbb{C}_{p-1}[X]$ tel que $\phi_{A,B}(U, V) = 1$. D'après le théorème de Bézout, cela équivaut à dire que A et B sont premiers entre eux, d'où le résultat. $\square$
- (2) On va utiliser la caractérisation suivante : $P \in \mathbb{C}[X]$ est scindé à racines simples si et seulement si P est premier avec P' . Le résultat de la question précédente s'applique alors : P est scindé à racines simples si et seulement si $\phi_{P,P'}$ est un isomorphisme. L'application $\Gamma_{p,q} : (A, B) \mapsto \phi_{A,B}$ sur $\mathbb{C}_{p-1}[X] \times \mathbb{C}_{q-1}[X]$ est clairement linéaire, continue car tous les espaces considérés sont de dimension finie. $P \mapsto (P, P')$ est également linéaire continue de $\mathbb{C}_n[X] \rightarrow \mathbb{C}_n[X] \times \mathbb{C}_{n-1}[X]$. D'après notre remarque, on a donc que l'ensemble des polynômes de $\mathbb{C}_n[X]$ scindés à racines simples est l'ensemble des polynômes P tels que $\det(\Gamma_{n,n-1}(P)) \neq 0$. Il est donc l'image réciproque de $\mathbb{C}^*$, qui est ouvert, par l'application continue $\det \circ \Gamma_{n,n-1}$, donc également ouvert. $\square$

Exercice 14

Montrer qu'il est impossible de piper deux dés de telle sorte que la somme des deux faces obtenues suive une loi uniforme sur $\llbracket 2, 12 \rrbracket$.

Corrigé proposé par J.J.T :

Soit X la variable aléatoire associée à la face obtenue du premier dé et Y l'analogue pour le second. On suppose par l'absurde qu'il est possible de les piper de telle manière que cela suive une loi uniforme. On note G_X et G_Y les fonctions génératrices associées à X et Y respectivement. Alors :

$$G_{X+Y}(t) = \frac{t^2}{11} \sum_{k=0}^{10} t^k = G_X(t)G_Y(t) = t^2 \left(\sum_{k=0}^5 \mathcal{P}(X = k+1)t^k \right) \left(\sum_{k=0}^5 \mathcal{P}(Y = k+1)t^k \right)$$

Notons $P(t) = \frac{1}{11}(1+t+\dots+t^{10})$. Alors d'après l'égalité ci-dessus, il existe deux polynômes de degré 5 à coefficients réels Q_X et Q_Y tels que $P(t) = Q_X(t)Q_Y(t)$. Or, les racines de P sont exactement les éléments de $\mathbb{U}_{11} \setminus \{1\}$, dont tous les éléments sont complexes. En notant $\theta = \frac{2\pi}{11}$, P se factorise sous forme irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ de la manière suivante :

$$P(t) = \frac{1}{11} \prod_{k=1}^5 (t^2 - 2 \cos(k\theta)t + 1)$$

On en tire que si on factorise Q_X par exemple en facteurs irréductibles, il serait forcément de degré pair, ce qui est faux, d'où l'absurdité. $\square$

Exercice 15

- (1) Trouver un équivalent, lorsque $x \rightarrow \infty$ de :

$$I(x) = \int_0^\infty \frac{\sin(t)}{x^2 + t^2} dt$$

- (2) Pour $x > 0$, on pose :

$$J(x) = \int_0^\infty \frac{\sin(t)}{e^{xt} - 1} dt$$

Trouver un équivalent de $J(x)$ lorsque $x \rightarrow 0^+$

Corrigé :

- (1) On remarque déjà que l'intégrale est toujours bien définie lorsque $x \neq 0$, car l'intégrande est toujours un $\mathcal{O}(1/t^2)$ au voisinage de l'infini et continue en 0. On effectue le changement de variables $t = sx$ avec $x > 0$ afin d'obtenir :

$$I(x) = \frac{1}{x} \int_0^\infty \frac{\sin(sx)}{1 + s^2} ds$$

On intègre encore par parties, en intégrant $s \mapsto \sin(sx)$ et en dérivant ce qu'il faut :

$$I(x) = \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x} \int_0^\infty \frac{2s \sin(sx)}{(1 + s^2)^2} ds \right)$$

De ce fait, on a :

$$x^2 I(x) = 1 - \int_0^\infty \frac{2s \sin(sx)}{(1 + s^2)^2} ds = 1 + o(1)$$

Grâce au lemme de Riemann-Lebesgue pour les fonctions L^1 de classe C^1 (voire corrigé de l'exercice 7). Ainsi, $I(x) \sim 1/x^2$.

3. CENTRALE

Exercice 1

On considère les prolongements continus sur $\mathbb{R}$ des fonctions suivantes :

$$t \mapsto \frac{e^t - 1}{t} \text{ de prolongement noté } f \text{ et } t \mapsto \frac{t}{e^t - 1} \text{ de prolongement noté } g$$

1) Justifier que f est développable en série entière et déterminer le rayon de convergence associé. Montrer de plus que f et g sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

2) On admet le théorème suivant :

Si $h \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est développable en série entière au voisinage de 0 telle que $h(0) \neq 0$, alors $\frac{1}{h}$ est développable en série entière au voisinage de 0.

a. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel qu'il existe une unique suite de polynômes $(P_n) \in \mathbb{R}[X]$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in]-r, r[, \frac{te^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P_n(x)}{n!} t^n$$

b. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, P'_{n+1} = (n+1)P_n$ et $\int_0^1 P_{n+1}(x)dx = 0$.

3) Démontrer le théorème admis en question 2).

(1) On a $t \mapsto e^t - 1$ développable en série entière de DSE :

$$\forall t \in \mathbb{R}, e^t - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}$$

Ainsi, par continuité en 0, on obtient le DSE de f sur $\mathbb{R}$:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \frac{e^t - 1}{t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{(n+1)!}$$

On remarque que son rayon de convergence est le même que celui de $t \mapsto e^t - 1$, c'est-à-dire $+\infty$. De plus, on remarque que $e^t - 1$ et t sont de même signe, donc que f est strictement positive sur $\mathbb{R}$ (car $f(0) = 1$). Puisque f admet un DSE sur $\mathbb{R}$, elle y est $\mathcal{C}^\infty$. Ainsi, g est l'inverse d'une fonction strictement positive et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, donc elle est elle-même $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

(2) a. D'après le théorème admis, puisque $f(0) = 1 \neq 0$, on en déduit que g admet un DSE au voisinage de 0. On note $r > 0$ son rayon de convergence. On pose maintenant $x \in \mathbb{R}$ et on écrit, pour $t \in]-r, r[$ les DSE suivants :

$$g(t) = \frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \text{ et } e^{xt} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(xt)^n}{n!}$$

On écrit donc le produit de ces deux DSE :

$$\frac{te^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{a_{n-k}}{k!} x^k \right) t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^n \frac{a_{n-k} n!}{k!} x^k \right) t^n$$

Ainsi, on définit de manière unique (par unicité du DSE de g) la suite de polynômes suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_n = \sum_{k=0}^n \frac{a_{n-k} n!}{k!} X^k$$

La définition de ces polynômes nous donne bien :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in]-r, r[, \frac{te^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P_n(x)}{n!} t^n$$

b. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P'_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{ka_{n+1-k}(n+1)!}{k!} X^{k-1} = (n+1) \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_{n-(k-1)} n!}{(k-1)!} X^{k-1}$$

Puisque le terme en $k = 0$ est nul, on s'est permis de simplifier et de supprimer ce rang. Par changement de variable, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P'_{n+1} = (n+1) \sum_{k=0}^n \frac{a_{n-k} n!}{k!} X^k = (n+1) P_n$$

En intégrant notre fonction initiale, on obtient :

$$\forall t \in]-r, r[\setminus \{0\}, \int_0^1 \frac{te^{xt}}{e^t - 1} dx = 1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\int_0^1 P_n(x) dx}{n!} t^n$$

Par unicité du DSE de $t \mapsto 1$, on a nécessairement $\int_0^1 P_n(x) dx = 0$ pour $n \geq 1$, c'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 P_{n+1}(x) dx = 0$$

- (3) Soit h une fonction réelle non nulle en 0 et développable en série entière au voisinage de 0. On pose donc $r > 0$ son rayon de convergence et on a :

$$\forall t \in]-r, r[, h(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \text{ avec } a_0 \neq 0$$

On se permet donc de factoriser par a_0 et passer à l'inverse :

$$\forall t \in]-r, r[, \frac{1}{h}(t) = \frac{1}{a_0} \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{+\infty} a'_n t^n}$$

Ici on a posé $a'_n := a_n/a_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En notant $H(t) = -\sum_{n=1}^{+\infty} a'_n t^n$, on a $H(0) = 0$, donc il existe un voisinage de 0 sur lequel $|H| < 1$. En se plaçant sur l'intersection de ce voisinage avec $] -r, r[$, on peut développer en série entière comme suit :

$$\frac{1}{h}(t) = \frac{1}{a_0} (1 + H(t) + H(t)^2 + \dots + H(t)^n + \dots)$$

À chaque puissance n on développe en série entière via les coefficients de Cauchy. Finalement, on a bien trouvé un voisinage de 0 sur lequel on peut développer $1/h$ en série entière. $\square$

Exercice 2

Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère la suite $(M_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ définie par :

$$M_0 = \alpha M \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}, M_{k+1} = M_k(2I_n - MM_k)$$

On rappelle que l'on note $\rho(M) = \max_{\lambda \in Sp(M)} |\lambda|$ le rayon spectral d'une matrice M .

Partie python

1) Dans cette question, on considère $M = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$ et $\alpha = \frac{1}{3}$.

Justifier que M est inversible. Proposer alors une valeur de la limite de la suite $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ en fonction de M^{-1} .

2) Dans cette question, on considère $M = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ et $\alpha = \frac{1}{3}$.

Calculer M^2 . Que peut-on en déduire sur M ? Proposer une valeur de la limite de $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

Partie théorique

3) Montrer que l'on a : $\forall j, k \in \mathbb{N}, M_{j+k} = M_j \sum_{i=0}^{2^k-1} (I_n - MM_j)^i$

4) On considère maintenant M symétrique réelle non nulle et α tel que $0 < \alpha < \frac{2}{\rho(M)^2}$.

a. Montrer que, dans ces conditions, la suite $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est convergente.

b. Dans le cas où M est inversible, déterminer la limite de $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

c. Qu'obtient-on comme limite dans le cas général?

5) On note L la limite d'une suite $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie à partir de M et α vérifiant les conditions introduites en question 4). On pose $Y \in \mathbb{R}^n$ et on munit $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne.

Définition : On dit que $Z \in \mathbb{R}^n$ est une **pseudo-solution** de l'équation $MX = Y$ lorsque :

$$\|MZ - Y\| = \inf_{X \in \mathbb{R}^n} \|MX - Y\|$$

Montrer alors que LY est l'unique pseudo-solution de l'équation $MX = Y$ sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 3

Soit G un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{C})$ tel que $G \cap SL_n(\mathbb{C}) = \{I_n\}$. Montrer que G est cyclique.

Solution proposée par J.J.T :

L'application $\det : G \rightarrow \mathbb{C}^*$ est un morphisme de groupe, et la condition de l'énoncé est que son noyau est réduit à $\{I_n\}$; autrement dit, G est isomorphe à un sous-groupe de $\mathbb{C}^*$. Il faut donc montrer que tous les sous-groupes finis de $(\mathbb{C}^*, \times)$ sont cycliques.

D'abord, soit G un sous-groupe fini de $\mathbb{C}^*$. Alors pour tout $g \in G$, $|g| = 1$. En effet, si $|g| > 1$ alors la suite (g^n) est infinie et incluse dans G , ce qui contredit la finitude de ce dernier. Si $0 < |g| < 1$, alors $1/g \in G$ car G est un groupe et donc on applique le raisonnement précédent à $1/g$.

D'après le théorème de Lagrange, en notant $a = \#G$, $g^a = 1$. Notons $\omega(g)$ l'ordre de $g \in G$ et notons $d = \max_{g \in G} \omega(g)$. Alors $G \subset \mathbb{U}_d$ par le théorème de Lagrange, donc $\#G \leq d$. D'autre part, $d \leq \#G$ car $\omega(g) \leq \#G$ pour tout g . Donc $G = \mathbb{U}_d$, qui est cyclique, d'où le résultat. $\square$

Exercice 4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'application qui à une matrice A associe A^T . Calculer $\det(\phi)$ et $\text{Tr}(\phi)$.

Corrigé proposé par J.J.T :

On commence par un petit lemme parfaitement élémentaire :

Lemme : On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices symétriques et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ celui des matrices antisymétriques. Alors :

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$$

Preuve : Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Alors $A^T = A = -A$ donc $A = O_n$, donc les deux espaces sont en somme directe. Ensuite, il suffit de remarquer que :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad A = \underbrace{\frac{1}{2}(A + A^T)}_{\in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})} + \underbrace{\frac{1}{2}(A - A^T)}_{\in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})}$$

Donc $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) + \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, d'où le résultat. $\square$

Or, on a les relations $\ker(\phi - \text{Id}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\ker(\phi + \text{Id}) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Donc ϕ est diagonalisable, et son polynôme minimal est $X^2 - 1$ (on aurait pu, par ailleurs, utiliser cela pour montrer le lemme). Ainsi, les valeurs propres sont seulement -1 et 1 , et leurs multiplicités sont la dimension de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ respectivement. Or, la dimension de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est $n(n+1)/2$, car un élément de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est uniquement déterminé par sa diagonale et tout ce qui se trouve au-dessus. Ainsi, celle de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est $n(n-1)/2$. On en déduit que :

$$\text{Tr}(\phi) = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = n \quad \text{et} \quad \det(\phi) = (-1)^{n(n-1)/2}$$

$\square$

Exercice 5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension n , p, q, r trois projecteurs tels que $p = \sqrt{2}q + \sqrt{3}r$. Montrer que $p = q = r = 0$.

Corrigé proposé par J.J.T :

Ça sent la trace ! On la prend. On en déduit qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ trois entiers tels que :

$$a = \sqrt{2}b + \sqrt{3}c$$

Supposons par l'absurde que l'un des trois projecteurs p, q, r est non nul. Alors ça veut dire qu'on a une combinaison linéaire non triviale $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{Z}^3$ qui vérifie :

$$\sqrt{3}\alpha + \sqrt{2}\beta + \gamma = 0$$

Si $\alpha \neq 0$, cela impliquerait que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ ce qui est évidemment faux. Supposons alors que $\alpha \neq 0$. On a alors :

$$\sqrt{3} = -\frac{\gamma + \sqrt{2}\beta}{\alpha} \implies 3 = \frac{(\gamma + \sqrt{2}\beta)^2}{\alpha^2} = \frac{\gamma^2 + 2\beta^2 + 2\sqrt{2}\beta\gamma}{\alpha^2}$$

On a donc $\beta\gamma = 0$ ou $\beta = 0$. $\beta = 0$ implique $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$, ce qui est évidemment faux. Si $\gamma = 0$, on a alors $\sqrt{3} = \delta\sqrt{2}$ pour un $\delta \in \mathbb{Q}$. Notons $\delta = a/b$ avec $a \wedge b = 1$. Alors :

$$\frac{3}{2} = \frac{a^2}{b^2} \iff 3b^2 = 2a^2$$

Donc $3|a$ et $2|b$ par le lemme de Gauss. On écrit alors $a = 3p$ et $b = 2q$ avec $p \wedge q = 1$. On a alors :

$$\frac{3}{2} = \frac{9p^2}{4q^2} \iff \frac{2}{3} = \frac{p^2}{q^2}$$

On a donc l'égalité $a^2/b^2 = q^2/p^2$. En prenant les racines, on trouve $a/b = q/p$ et donc par identification (tout a été simplifié au maximum), $a = q$ et $b = p$, ce qui est absurde car on a alors $2a = b$ et $3b = a$. Donc dans tous les cas, ce n'est pas possible! $\square$

Exercice 6

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires iid à valeurs dans $\{-1, 1\}$ telles que $\mathcal{P}(X_i = 1) = \mathcal{P}(X_i = -1) = 1/2$ pour tout $i \geq 1$. On pose pour tout $n \geq 1$, $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

- (1) Déterminer une expression explicite, puis un équivalent, de la probabilité $\mathcal{P}(S_n = 0)$.
- (2) En déduire que $S_n = 0$ pour une infinité de $n \in \mathbb{N}^*$ $\mathcal{P}$ -presque sûrement.

Corrigé proposé par J.J.T :

- (1) Pour tout $i \geq 1$, on pose $Y_i = \frac{X_i + 1}{2}$. Alors $Y_i \hookrightarrow \mathcal{B}(1/2)$ pour tout $i \geq 1$ et donc pour tout $n \geq 1$:

$$\tilde{S}_n = \sum_{i=1}^n Y_i \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 1/2)$$

On en tire que, pour tout $0 \leq k \leq n$, $\mathcal{P}(\tilde{S}_n = k) = \frac{1}{2^n} \binom{n}{k}$. Or :

$$\tilde{S}_n = \frac{1}{2}S_n + \frac{n}{2} \implies \forall 1 \leq k \leq n, \mathcal{P}(S_n = 2k - n) = \frac{1}{2^n} \binom{n}{k}$$

On en tire que $S_n = 0$ est possible seulement si $n = 2p$ pour un $p \geq 1$. Ainsi :

$$\mathcal{P}(S_{2p} = 0) = \frac{1}{4^p} \binom{2p}{p} \sim_{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi p}}$$

$\square$

- (2) On pose $Z = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}(S_{2n} = 0)$. On va raisonner par l'absurde, en supposant que $S_n = 0$ ne se produit qu'un nombre fini de fois $\mathcal{P}$ -presque sûrement. Z admet donc une espérance. En effet :

$$Z = \#\{k \in \mathbb{N}, S_{2k} = 0\} \implies \mathbb{E}(Z) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{P}(Z \geq k)$$

Cette dernière somme est, par hypothèse, finie, donc convergente. Or, par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(\mathbf{1}(S_{2n} = 0)) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}(S_{2n} = 0)$$

Or, $\mathcal{P}(S_{2n} = 0) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$, qui n'est pas sommable, d'où le résultat. $\square$

Exercice 7

Soit G un sous groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$. Soit $m \geq 3$, $g \in G$. On suppose que les coefficients de $g - I_n$ sont tous divisibles par $m \geq 3$, et on pose $A = \frac{1}{m}(g - I_n)$.

- (1) Montrer que A est diagonalisable et que $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{D}(0, 1)$
- (2) En déduire que A est nilpotent et que $g = I_n$.
- (3) En déduire que $|G| \leq \prod_{k=1}^{n-1} (3^n - 3^k)$

Corrigé proposé par J.J.T :

- (1) D'après le théorème de Lagrange, pour tout $g \in G$, en notant $d = |G|$, $g^d = I_n$. Ainsi, tout les éléments de G sont annulés par le polynôme $X^d - 1$ qui est simplement scindé dans $\mathbb{C}[X]$. On en déduit que tout les éléments de G sont diagonalisable, et que pour tout $g \in G$, $\mathrm{Sp}(g) \subset \mathbb{U}_d$.

Soit $g \in G$ vérifiant les hypothèses de l'énoncé. $g = PDP^{-1}$ avec $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, avec $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{U}_d^n$. Alors :

$$A = P \mathrm{Diag}\left(\frac{\lambda_1 - 1}{m}, \dots, \frac{\lambda_n - 1}{m}\right) P^{-1}$$

On a donc $\mathrm{Sp}(A) = \{(\lambda_1 - 1)/m, \dots, (\lambda_n - 1)/m\}$. or, on a supposé que $m \geq 3$; par l'inégalité triangulaire, on en tire que pour tout $\mu \in \mathrm{Sp}(A)$, $|\mu| \leq 2/3$, donc $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{D}(0, 1)$.

- (2) D'après la question précédente, $\lim_{p \rightarrow \infty} A^p = O_n$. En notant $A^p = (a_{i,j}(p))_{1 \leq i,j \leq n}$, par hypothèse $(a_{i,j}(p))_{p \geq 0} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ pour tout $1 \leq i, j \leq n$. Mais (A^p) tends vers la matrice nulle; il existe donc un $N_{i,j} \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $p \geq N_{i,j}$, $|a_{i,j}(p)| \leq 1/2$. Donc pour tout $p \geq N_{i,j}$, $a_{i,j}(p) = 0$. On pose alors $N = \max 1 \leq i, j \leq n N_{i,j}$. On a alors $A^N = O_n$. A est donc nilpotent, mais également diagonalisable; on en déduit que $A = O_n$. En réarrangeant, on retrouve alors $g = I_n$.
- (3) On pose $\pi : \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$. D'après la question précédente avec $m = 3$, ce morphisme est injectif. On en déduit notamment que $\pi(G)$ est un sous groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ de même cardinal que G . Ainsi :

$$|G| = |\pi(G)| \leq \left| \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \right| = \prod_{k=1}^{n-1} (3^n - 3^k)$$

Pour la dernière égalité, voire le corrigé de l'exercice 3 section Mines-Ponts.

Exercice 8

Soit $(G, +)$ un sous groupe de $(\mathbb{R}, +)$. On pose $\alpha = \inf(G \cap \mathbb{R}_+^*)$.

- (1) Montrer que si $\alpha > 0$, $G = \alpha\mathbb{Z}$ et que si $\alpha = 0$ alors $\overline{G} = \mathbb{R}$.
- (2) Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ périodique non constant de période $T > 0$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur T pour que $f(\mathbb{Z})$ soit dense dans $f(\mathbb{R})$.
- (3) Déterminer l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(\cos(n))_{n \in \mathbb{N}}$.

Corrigé proposé par J.J.T :

- (1) Posons en effet $\alpha = \inf(G \cap \mathbb{R}_+^*)$. On suppose que $\alpha > 0$. Si $\alpha \notin G$, alors il existe une infinité d'éléments de G entre α et 2α . Parmi eux, prenons g et h avec $g < h$. On a $h - g \in G$, or $\alpha > h - g > 0$, ce qui contredit le principe de la borne inférieure. Donc on a nécessairement $\alpha \in G$.

Ainsi, $\alpha\mathbb{Z} \subset G$. Or, si l'on suppose qu'il existe $g \in G \cap \mathbb{R}_+^*$ tel qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $k\alpha < g < (k+1)\alpha$, on obtient $0 < g - k\alpha < \alpha$ avec $g - k\alpha \in G$, ce qui contredit à nouveau le principe de la borne inférieure. On peut obtenir la même contradiction pour g négatif.

Ainsi, on a montré, dans le cas où $\alpha = \inf(G \cap \mathbb{R}_+^*) > 0$, que $G = \alpha\mathbb{Z}$.

Supposons maintenant que $\inf(G \cap \mathbb{R}_+^*) = 0$. Considérons alors deux réels $0 < x < y$ (les bornes de notre I). Puisque $y - x > 0$, il existe $g \in G$ tel que $0 < g < y - x$ (d'après l'hypothèse de départ). Comme vu dans la question 1, on peut ainsi déterminer $k \in \mathbb{N}$ tel que $x < kg < y$ avec $kg \in G$.

On a donc montré que l'on peut loger un élément de G dans tout intervalle ouvert de $\mathbb{R}_+^*$. Puisque $0 \in G$ et que, par passage à l'opposé, on obtient le même résultat sur $\mathbb{R}_-^*$, on en déduit que G est dense dans $\mathbb{R}$.

- (2) Il est clair que si $T \in \mathbb{Q}$ l'ensemble $f(\mathbb{Z})$ est finie, donc ne peut pas être dense dans $f(\mathbb{R})$ car ce dernier est indénombrable d'après le théorème de Weierstrass sur les bornes atteintes. Montrons alors qu'il suffit que T soit irrationnel. On considère $G = \mathbb{Z} + T\mathbb{Z}$. Il est évident que $(G, +) < (\mathbb{R}, +)$. Montrons que $\alpha = \inf(G \cap \mathbb{R}_+^*) = 0$, et que G est donc dense dans $\mathbb{R}$. Supposons que $\alpha > 0$. Alors il existe un réel $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $G = \beta\mathbb{Z}$. On a alors l'existence d'un couple $(n, m) \in (\mathbb{Z}^*)^2$ tel que :

$$\begin{cases} T = \beta n \\ 1 + T = \beta m \end{cases} \iff \begin{cases} T = \beta n \\ 1 = \beta(m - n) \end{cases}$$

C'est à dire que $\beta \in \mathbb{Q}$ et que T aussi, ce qui est absurde. G est donc dense dans $\mathbb{R}$ et on en tire que $f(G)$ est dense dans $f(\mathbb{R})$ par continuité. Or, par T périodicité, $f(G) = f(\mathbb{Z})$. Donc si T est irrationnel, $f(\mathbb{Z})$ est dense dans $f(\mathbb{R})$.

Réciproquement, on raisonne par contraposée, ce qu'on a fait au tout début de la question.

- (3) π est irrationnel, donc 2π également. De ce fait, d'après la question précédente, l'ensemble $\cos(\mathbb{Z}) = \cos(\mathbb{N})$ est dense dans $\cos(\mathbb{R}) = [-1, 1]$. Pour montrer que c'est également l'ensemble des valeurs d'adhérence, il suffit de remarquer que, puisque $[-1, 1]$ n'admet pas de points isolés, l'adhérence de $\cos(\mathbb{N})$ est l'ensemble de ses valeurs d'adhérence. En effet, si on note V l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(\cos(n))_{n \in \mathbb{N}}$:

$$V = \bigcap_{p \in \mathbb{N}} \overline{\{\cos(n), n \geq p\}}$$

Or, quitte à épouser l'intervalle $[-1, 1]$ des p premiers valeurs de la suite considérée, l'adhérence de ce dernier reste $[-1, 1]$. De ce fait, dans l'intersection au dessus, pour chaque indice p l'adhérence considérée est toujours la même, c'est à dire $[-1, 1]$, d'où le résultat.

Exercice 9

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose :

$$I(\alpha) = \int_0^\infty \frac{x \ln(x)}{(1+x^2)^\alpha} dx$$

- (1) Déterminer les valeurs de α pour lesquels $I(\alpha)$ est convergente.
- (2) Calculer $I(2)$ et $I(3)$. Déterminer la limite de $I(\alpha)$ lorsque $\alpha \rightarrow \infty$.

Corrigé :

- (1) Il est clair qu'au voisinage de l'infini, l'intégrande est équivalent à $\frac{x \ln(x)}{x^{2\alpha}}$ donc l'intégrale est convergente si et seulement si $\alpha > 1$. Au voisinage de 0, quelque soit la puissance α on a un équivalent simple qui est $x \ln(x)$ qui est toujours intégrable car prolongeable par continuité en 0. Ainsi, $I(\alpha)$ est convergent pour tout $\alpha > 1$.

- (2) On traite d'abord le cas $\alpha = 2$. On fait le changement de variable $t = x^2$ pour se ramener à :

$$I(\alpha) = \frac{1}{4} \int_0^\infty \frac{\ln(x)}{(1+x)^\alpha} dx$$

On aimerait bien intégrer par parties, mais cela posera problèmes au niveau des bornes. On fixe alors $0 < \delta < R$ et on pose :

$$I(\delta, R) = \frac{1}{4} \int_\delta^R \frac{\ln(x)}{(1+x)^2} dx$$

On intègre par parties ; cela nous donne :

$$I(\delta, R) = \frac{1}{4} \left(\frac{\ln(\delta)}{1+\delta} - \frac{\ln(R)}{1+R} + \int_\delta^R \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} dx \right)$$

On trouve finalement :

$$I(\delta, R) = \frac{1}{4} \left(\frac{\ln(\delta)}{1+\delta} - \frac{\ln(R)}{1+R} + \ln(R) - \ln(\delta) - \ln(R+1) + \ln(\delta+1) \right)$$

Or, on sait que $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} I(\delta, R) = \frac{1}{4} \int_0^R \frac{\ln(x)}{(1+x)^2} dx$. Un développement limité nous donne :

$$I(\delta, R) = \frac{1}{4} \left(\ln(\delta) - \ln(\delta) + \mathcal{O}(\delta \ln(\delta)) - \ln \left(1 + \frac{1}{R} \right) - \frac{\ln(R)}{R+1} \right) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} -\frac{1}{4} \left(\ln \left(1 + \frac{1}{R} \right) + \frac{\ln(R)}{R+1} \right)$$

Et en laissant tendre $R \rightarrow \infty$ on conclut que $I(2) = 0$.

Pour $I(3)$, on pourrait procéder par la même manière, mais on propose ici une solution encore plus astucieuse. On effectue le changement de variables $x = e^u$ dans l'expression de $I(3)$ afin de trouver :

$$I(3) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2u}u}{(1+e^{2u})^3} du = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ue^{-u}}{(e^u+e^{-u})^3} du = \int_0^{\infty} \frac{-u(e^u+e^{-u})}{(e^u-e^{-u})^3} du$$

la dernière égalité s'obtenant en séparant l'intégrale en deux autour de 0 et effectuer le changement de variables $x = -u$. Ainsi, en effectuant une IPP :

$$I(3) = \left[\frac{u}{2(e^u+e^{-u})} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{1}{2(e^u+e^{-u})} du = - \int_0^{\infty} \frac{e^{2u}}{2(1+e^{2u})} du = -\frac{1}{8}$$

On voit facilement que $I(\alpha) \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} 0$ par convergence dominée.