

COLLES SAINT LOUIS MPSI4



TABLE DES MATIÈRES

Table des matières	1
Introduction	1
Semaine 1	1
Questions de cours	1
Solutions	2
Exercices	4
Solutions	5
Exercices bonus	7
Solutions	8
Semaine 2	12
Questions de cours	12
Solutions	12
Exercices	14
Solutions	15
Semaine 3	23
Questions de cours	23
Solutions	23
Exercices	24
Solutions	24

INTRODUCTION

Ceci est un document qui rassemble l'ensemble des exercices que j'ai voulu faire passer en colle, en ordre des semaines. Il y a les énoncés et les corrigés. Pour les élèves que j'ai eu en colle (et d'autres bien sûr !) Je vous encourage de bien profiter et comprendre les corrigés dans toute leur profondeur et de regarder les autres exercices. Les exercices à donner en premier sont globalement plus facile que les deuxièmes exercices, qui sont à leur tour bien plus compliqué que les exercices bonus (je peux y cacher quelques oraux X/ENS là dedans...). Bon courage !

SEMAINE 1

Questions de cours. _____

- (1) Déterminer toutes les fonctions dérivables $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tels que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$.
- (2) Montrer que pour tout $x > 0$ vérifiant $x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$, on a pour tout $n \geq 1$, $x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$.

- (3) Tracer la courbe de la fonction $x \mapsto 3 \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$.
- (4) Résoudre $\sin(5x) \geq \sin(x)$ sur $\mathbb{R}$.
- (5) Linéariser $x \mapsto \cos(x)^4$.
- (6) Montrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s'écrit comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire de façon unique.

Solutions.

- (1) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{f(h)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} f'(0) = f'(x)$$

On en tire que $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt = xf'(0)$. Or, $f(0) = f(0+0) = 2f(0)$ donc $f(0) = 0$. Ainsi, si f est dérivable et vérifie $f(x+y) = f(x) + f(y)$ quel que soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, f est forcément de la forme $x \mapsto \lambda x$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$. Réciproquement, toute fonction de la forme $x \mapsto \lambda x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ vérifie les hypothèses de l'énoncé, d'où le résultat.

- (2) *Première méthode* : Pour tout $n \geq 1$, on note $\mathcal{H}_n$ l'hypothèse " $x^n + x^{-n} \in \mathbb{Z}$ ". Alors $\mathcal{H}_0$ est vérifiée et $\mathcal{H}_1$ l'est également par hypothèse. Soit donc $n \geq 1$ et supposons $\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_n$ tous vraies. Alors :

$$\left(x + \frac{1}{x}\right) \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) = x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}} + x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}} \in \mathbb{Z}$$

Car $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_n$ sont supposées vraies. Or, $\mathcal{H}_{n-1}$ est également vraie donc par produit et différence d'entiers on conclut que $\mathcal{H}_{n+1}$ est alors vraie. Par principe de la récurrence, on en tire que quelque soit $n \geq 0$, $x^{-n} + x^n \in \mathbb{Z}$.

Deuxième méthode, nettement plus compliqué : On raisonne par récurrence. On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}_n$ l'hypothèse " $x^n + x^{-n} \in \mathbb{Z}$ ". L'initialisation est vraie : le cas $n = 1$ est vérifié par hypothèse. Soit donc $n \geq 1$ et supposons $\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_n$ tous vraies. Alors :

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^{n+1} = x^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} x^k x^{-n-1+k} + \frac{1}{x^{n+1}} \in \mathbb{Z}$$

Car $\mathcal{H}_1$ est vraie. On fait alors une disjonction de cas :

- Si n est pair, alors $n = 2p$ pour un certain $p \geq 1$. Ainsi :

$$S = \sum_{k=1}^{2p} \binom{2p+1}{k} x^k x^{-2p-1+k} = \underbrace{\sum_{k=1}^p \binom{2p+1}{k} x^k x^{-2p-1+k}}_{S_1} + \underbrace{\sum_{k=1}^p \binom{2p+1}{k+p} x^{p+k} x^{-2p-1+k+p}}_{S_2}$$

Or, en posant $h = p - k + 1$, $S_1 = \sum_{k=1}^p \binom{2p+1}{p-k+1} x^{-2k+1}$, et en utilisant le triangle de Pascal

(c'est à dire l'identité $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ pour $0 \leq k \leq n$), on a $S_2 = \sum_{k=1}^p \binom{2p+1}{p-k+1} x^{2k-1}$.

Ainsi :

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^{n+1} = \frac{1}{x^{n+1}} + x^{n+1} + \underbrace{\sum_{k=1}^p \binom{2p+1}{p-k+1} (x^{2k-1} + x^{-2k+1})}_{\in \mathbb{Z}}$$

Car pour tout $1 \leq k \leq p$ on a $1 \leq 2k-1 \leq n$ et $\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_n$ sont tous vraies. Ainsi, il existe un entier relatif $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x^{n+1} + x^{-n-1} + k \in \mathbb{Z}$, donc $x^{n+1} + x^{-n-1} \in \mathbb{Z}$.

— Si n est impair, $n = 2p + 1$ pour un certain $p \geq 0$. Alors :

$$S = \underbrace{\sum_{k=1}^p \binom{2p+2}{k} x^{2k-2p-2}}_{S_1} + \binom{2p+2}{p+1} + \underbrace{\sum_{k=p+2}^{2p+1} \binom{2p+2}{k} x^{2k-2p-2}}_{S_2}$$

Ainsi, $S_2 = \sum_{k=1}^p \binom{2p+2}{k+p+1} x^{2k} = \sum_{k=1}^p \binom{2p+2}{p-k+1} x^{2k}$ et $S_1 = \sum_{k=1}^p \binom{2p+2}{p-k+1} x^{-2k}$ de la même façon qu'au cas précédent. De la même manière en regroupant les termes, on conclut que si $n = 2p + 1$, $x^{n+1} + x^{-n-1} \in \mathbb{Z}$.

De ce fait, par récurrence forte on en déduit que $\mathcal{H}_n$ est vraie quel que soit $n \geq 1$.

(3) Le dessiner !

(4) On montre d'abord le lemme suivant : pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\sin(a) - \sin(b) = 2 \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

En effet, en prenant $x = \frac{a+b}{2}$ et $y = \frac{a-b}{2}$, on a $x+y = a$ et $x-y = b$. Alors :

$$\sin(a) - \sin(b) = \sin(x+y) - \sin(x-y) = 2 \sin(y) \cos(x) = 2 \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Ainsi, on souhaite trouver les réels $x \in \mathbb{R}$ tels que $\cos(3x) \sin(2x) \geq 0$, c'est à dire les $x \in \mathbb{R}$ tels que $\cos(3x)$ et $\sin(2x)$ sont de la même signe. On regarde sur l'intervalle $[0, 2\pi]$: on voit aisément que $\sin(2x) \geq 0$ sur les intervalles $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ et $\sin(2x) \leq 0$ sur $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ et $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$. Ainsi :

$$\{x \in \mathbb{R}, \sin(2x) \geq 0\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2} \right]$$

$$\{x \in \mathbb{R}, \sin(2x) \leq 0\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{(2k-1)\pi}{2}, k\pi \right]$$

On fait de même pour trouver les réels $x \in \mathbb{R}$ tels que $\cos(3x) \geq 0$. $\cos(3x) = 0$ admet comme solutions $\left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6} \right\}$, et de façon générale $\cos(3x) = 0$ si et seulement si $x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$ pour un $k \in \mathbb{Z}$. $\cos(3x) \geq 0$ sur les intervalles $\left[\frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{6}, \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \right]$ et $\cos(3x) \leq 0$ sur les intervalles $\left[\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}, \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{2} \right]$. Ainsi :

$$\{x \in \mathbb{R}, \cos(3x) \geq 0\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{6}, \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \right]$$

$$\{x \in \mathbb{R}, \cos(3x) \leq 0\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}, \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{2} \right]$$

Donc, en regardant ou coïncident ces deux ensembles (en prenant l'intersection) :

$$\{x \in \mathbb{R}, \sin(5x) \geq \sin(x)\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[2k\pi, 2k\pi + \frac{\pi}{6} \right] \cup \left[2k\pi + \frac{5\pi}{6}, 2k\pi + \pi \right] \cup \left[2k\pi + \frac{7\pi}{6}, 2k\pi + \frac{11\pi}{6} \right]$$

(5) On passe par les formules d'Euler. quel que soit $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos(x)^4 = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^4 = \frac{1}{16} (e^{4ix} + 4e^{2ix} + 6 + 4e^{-2ix} + e^{-4ix}) = \frac{1}{8} (\cos(4x) + 4\cos(2x) + 3)$$

(6) On le démontre par analyse-synthèse : nous allons d'abord essayer de déterminer les fonctions P et F à introduire (l'analyse) pour ensuite montrer qu'elles existent, qu'elles sont uniques et qu'elles vérifient la propriété attendue (la synthèse).

— *Analyse* : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction pouvant s'écrire $f = P + I$ comme vu dans l'énoncé. Évaluons donc f en un point $x \in \mathbb{R}$ et en son opposé :

$$f(x) = {}_{(1)} P(x) + I(x) \text{ et } f(-x) = P(-x) + I(-x) = {}_{(2)} P(x) - I(x)$$

Notre but étant d'accéder à la fonction P et la fonction I séparément, nous allons sommer et soustraire entre elles l'équation (1) et l'équation (2) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} 2P(x) = f(x) + f(-x) & : (1) + (2) \\ 2I(x) = f(x) - f(-x) & : (1) - (2) \end{cases} \iff \forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} P(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \\ I(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \end{cases}$$

On a bien déterminé les fonctions P et I , donc nous avons terminé l'analyse.

— *Synthèse* : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On considère les fonctions suivantes :

$$P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{f(x) + f(-x)}{2} \text{ et } I : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Il est évident que ces fonctions sont respectivement paire et impaire et que leur somme est la fonction f . C'est deux fonctions sont donc adéquates pour vérifier l'écriture souhaitée. On a alors terminé la synthèse.

Exercices. Premiers exercices

(1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système suivant :

$$\begin{cases} -x + y + z = 1 \\ x - y + z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

(2) Résoudre les systèmes suivants dans $\mathbb{C}^2$:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 2 \end{cases} & \text{(c)} \begin{cases} x + y = 3 + 4i \\ xy = 5 + 15i \end{cases} \\ \text{(b)} \begin{cases} x + y = 3i \\ xy = -1 - 3i \end{cases} & \text{(d)} \begin{cases} x + y = 1 + i \\ xy = 2 \end{cases} \end{array}$$

(3) Montrer que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $x \leq \frac{2}{3} \sin(x) + \frac{1}{3} \tan(x)$.

(4) Montrer que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x$.

En deuxième exercice

(1) Montrer que si $(x, y) \in]0, 2[\times]-2, 0[$, $1/x - 1/y > 1$.

(2) Soit $x \in \mathbb{R}$ vérifiant $\forall \varepsilon > 0$, $0 \leq |x| \leq \varepsilon$. Montrer que $x = 0$.

(3) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ paire et impaire. Montrer que f est la fonction nulle.

- (4) Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Montrer que $\ln(3)/\ln(2) \notin \mathbb{Q}$.
- (5) Montrer que tout entier naturel supérieur ou égal à 2 peut s'écrire de manière unique comme produit de nombres premiers.

Solutions. *Premiers exercices*

- (1) On remarque que $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ est solution et par unicité on a fini. Sinon, on peut faire les calculs pour s'en convaincre.
- (2) Ces quatre systèmes peuvent se résoudre en utilisant les formules de Viète sur les racines de polynômes du second degré :

$$(a) \begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 2 \end{cases} \iff x \text{ et } y \text{ sont racines de } X^2 - 2X + 2 = (X-1)^2 + 1 \iff \{x, y\} = \{1+i, 1-i\}$$

$$(b) \begin{cases} x + y = 3i \\ xy = -1 - 3i \end{cases} \iff x \text{ et } y \text{ sont racines de } X^2 - 3iX - 1 - 3i$$

Le discriminant associé est $\Delta = (-3i)^2 - 4(-1 - 3i) = -5 + 12i$. En résolvant $\delta^2 = \Delta$, on obtient $\delta = 2 + 3i$, donc on trouve :

$$x = \frac{3i + 2 + 3i}{2} = 1 + 3i \text{ et } y = -1$$

$$(c) \begin{cases} x + y = 3 + 4i \\ xy = 5 + 15i \end{cases} \iff x \text{ et } y \text{ sont racines de } X^2 - (3 + 4i)X + 5 + 15i$$

Le discriminant associé est $\Delta = (3 + 4i)^2 - 4(5 + 15i) = -25 - 36i$. En résolvant $\delta^2 = \Delta$, on obtient $\delta = 3 - 6i$, donc on trouve :

$$x = \frac{3 + 4i - 3 + 6i}{2} = 5i \text{ et } y = 3 - i$$

$$(d) \begin{cases} x + y = 1 + i \\ xy = 2 \end{cases} \iff x \text{ et } y \text{ sont racines de } X^2 - (1 + i)X + 2$$

Le discriminant associé est $\Delta = (1 + i)^2 - 4(2) = -8 + 2i$. En résolvant $\delta^2 = \Delta$, on obtient $\delta = \sqrt{-4 + \sqrt{17}} + i\sqrt{4 + \sqrt{17}}$, donc on trouve quelque chose d'imbuvable :

$$x = \frac{1 + \sqrt{-4 + \sqrt{17}} + i(1 + \sqrt{4 + \sqrt{17}})}{2} \text{ et } y = \frac{1 - \sqrt{-4 + \sqrt{17}} + i(1 - \sqrt{4 + \sqrt{17}})}{2}$$

- (3) On définit la fonction $f : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \frac{2}{3} \sin(x) + \frac{1}{3} \tan(x) - x$. Cette fonction est dérivable, d'où : $f'(x) = \frac{2}{3} \cos(x) + \frac{1}{3}(1 + \tan(x)^2) - 1 = \frac{2}{3} \cos(x) + \frac{1}{3} \tan(x)^2 - \frac{2}{3}$. De plus : $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \cos(x)^2 > 0$ donc la fonction :

$$g(x) = \cos(x)^2 f'(x) = \frac{2}{3} \cos(x)^3 + \frac{1}{3} \sin(x)^2 - \frac{2}{3} \cos(x)^2$$

est du signe de $f'(x)$. On a : $g(x) = \frac{2}{3} \cos(x)^3 + \frac{1}{3}(1 - \cos(x)^2) - \frac{2}{3} \cos(x)^2 = \cos(x)^2 (\frac{2}{3} \cos(x) - 1) + \frac{1}{3}$ où $g : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable avec :

$$g'(x) = -2 \sin(x) \cos(x)^2 + 2 \sin(x) \cos(x) = 2 \cos(x) \sin(x) (1 - \cos(x)) \geq 0$$

car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 - \cos(x) \geq 0$, et pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $2 \sin(x) \cos(x) \geq 0$. La fonction g est donc croissante sur son ensemble de définition, or : $g(0) = 0$ donc $g \geq 0$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. On en déduit,

comme $f'(x)$ est du signe de $g(x)$, que $f' \geq 0$ sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ i.e. f croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}[$. Finalement, $f(0) = 0$ donne $f \geq 0$ sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ donc on en déduit : pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $x \leq \frac{2}{3} \sin(x) + \frac{1}{3} \tan(x)$.

- (4) Pour démontrer la première inégalité en lisant de gauche à droite, considérons $f : x \mapsto \sin(x) - x + x^3/6$ dérivable sur $[0, \pi/2[$ de dérivée $f' : x \mapsto \cos(x) - 1 + x^2/2$ et de double dérivée $f'' : x \mapsto x - \sin(x)$, positive sur $[0, \pi/2[$. Ainsi, f' est croissante, donc minorée par sa valeur en 0, d'où $f' \geq 0$. Ainsi, f est elle aussi minorée par sa valeur en 0, d'où $f \geq 0$ ce qui permet de conclure :

$$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[, x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x)$$

Pour l'autre inégalité, ou bien on adapte la méthode précédente ou bien on remarque que $x \mapsto \sin(x)$ est concave sur $[0, \pi]$ et donc en dessous de toutes ses tangentes, notamment celle en 0 qui est exactement $x \mapsto x$.

En deuxième exercice _____

- (1) Soit $(x, y) \in]0, 2[\times]-2, 0[$. En gardant en tête que le passage à l'opposé ou à l'inverse change le sens dans les inégalités, on a :

$$0 < x < 2 \text{ et } -2 < y < 0 \implies \frac{1}{x} > \frac{1}{2} \text{ et } -\frac{1}{y} > \frac{1}{2} \implies \frac{1}{x} - \frac{1}{y} > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

□

- (2) Soit $x \in \mathbb{R}$ vérifiant la propriété introduite. Supposons $x \neq 0$. On pose donc $\varepsilon = \frac{|x|}{2} > 0$. On aurait donc : $0 < |x| < \frac{|x|}{2}$. Cette inégalité étant absurde, on a nécessairement $x = 0$

□

- (3) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction paire et impaire. Ces deux propriétés signifient respectivement :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x) \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x)$$

On peut donc identifier les deux membres de droites dans les deux égalités :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -f(x) \iff \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0 \iff f \text{ est la fonction nulle}$$

□

- (4) On a déjà montré dans la correction de l'exercice 3 l'irrationalité de $\sqrt{2}$. Montrons donc celle de $\frac{\ln(3)}{\ln(2)}$, à nouveau pas l'absurde :

Supposons qu'il existe $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{\ln(3)}{\ln(2)} = \frac{p}{q} \iff q \ln(3) = p \ln(2)$. En utilisant les propriétés du logarithme népérien de puissance de nombres, on obtient $\ln(3^q) = \ln(2^p)$. Par injectivité de la fonction $\ln$ sur $\mathbb{R}_+$, on aboutit à $3^q = 2^p$ (où par simple application de sa réciproque, $x \mapsto e^x$).

Remarquons maintenant que $\ln(3)$ et $\ln(2)$ sont deux réels strictement positifs, car 3 et 2 sont strictement supérieurs à 1. On a donc une information supplémentaire : $p \in \mathbb{N}^*$. Nous avons ainsi obtenu l'égalité d'une puissance de 3 et d'une puissance de 2 non égale à 1. Puisque toute puissance de 3 est impaire et que toute puissance de 2 non égale à 1 est paire, ce résultat est absurde.

On a donc bien démontré que $\frac{\ln(3)}{\ln(2)}$ est irrationnel.

□

Étant donné que P et I sont uniquement déterminée par f d'après l'analyse, on a bien démontré par analyse-synthèse que toute fonction réelle s'écrit de manière unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. On dit que l'espace des fonctions paires est celui des fonctions impaires sont supplémentaires dans l'espace des fonctions réelles (ces trois espaces sont des espaces vectoriels).

□

- (5) Ce résultat est en fait le *théorème fondamental de l'arithmétique*. On démontrera tout d'abord l'existence de l'écriture en produit de facteurs premiers par récurrence forte :

On considère : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, P(n) : "n \text{ s'écrit comme un produit de facteur premier.}"$

- *Initialisation* : Pour $n = 2$, puisque 2 est premier, $P(2)$ est vrai (c'est un produit contenant un seul facteur premier).
- *Hérédité* : Soit $n \geq 2$ tel que pour tout $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, $P(k)$ est vrai. Si $n + 1$ est premier, tout comme pour $n = 2$, $P(n + 1)$ est vrai. Toutefois si $n + 1$ n'est pas premier, il admet au moins un diviseur d tel que $2 \leq d \leq n$ et $2 \leq \frac{n+1}{d} \leq n$. On applique donc notre hypothèse de récurrence à ces deux entiers, et puisque le produit de deux produits de facteurs premiers est un produit de facteurs premiers, on a bien : $n + 1 = d \cdot \frac{n+1}{d}$ s'écrit comme un produit de facteur premier, donc $P(n + 1)$ est vrai.

On a donc bien démontré l'existence de l'écriture en produit de facteurs premiers de tout entier $n \geq 2$. Passons maintenant à l'unicité :

Soit un entier $n \geq 2$. On suppose que n admet deux écritures en produits de facteurs premiers. On introduit donc :

$$\exists p_1, \dots, p_s, q_1, \dots, q_r \in \mathbb{P}, \exists \alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta_1, \dots, \beta_r \in \mathbb{N}^*, n = \prod_{i=1}^s p_i^{\alpha_i} = \prod_{j=1}^r q_j^{\beta_j}$$

Si l'on suppose de plus que ces écritures sont différentes, on peut traiter le cas $s \leq r$ sans perdre de généralité. On a donc :

$$\forall i \in \llbracket 1, s \rrbracket, p_i \mid \prod_{i=1}^s p_i^{\alpha_i} = \prod_{j=1}^r q_j^{\beta_j}$$

D'après une conséquence immédiate du lemme de Gausse, cela signifie :

$$\forall i \in \llbracket 1, s \rrbracket, \exists j \in \llbracket 1, r \rrbracket, p_i \mid q_j$$

Or puisque les p_i et q_j sont premiers, on en conclue le résultat suivant :

$$\forall i \in \llbracket 1, s \rrbracket, \exists! j \in \llbracket 1, r \rrbracket, p_i = q_j$$

(Les q_j étant évidemment supposés différents, on a l'unicité des indices j). On a donc pu trouver une injection de l'ensemble des p_i dans celui des q_j en montrant que les p_i se retrouvent tous dans l'ensemble des q_j . On peut reclasser sans perdre de généralité les q_i de manière à ce que les p_i apparaissent en premiers pour factoriser dans l'expression :

$$\prod_{i=1}^s p_i^{\alpha_i} = \prod_{j=1}^s p_j^{\beta_j} \cdot \prod_{j=s+1}^r q_j^{\beta_j}$$

Étant donné que les p_i n'apparaissent pas dans $\{q_j, j \in \llbracket s+1, r \rrbracket\}$, cette écriture montre donc que pour tout $i \in \llbracket 1, s \rrbracket$, $p_i^{\alpha_i} \mid p_i^{\beta_i}$ et $p_i^{\beta_i} \mid p_i^{\alpha_i}$, donc que $p_i^{\alpha_i} = p_i^{\beta_i}$, et enfin que $\alpha_i = \beta_i$. On peut donc simplifier l'égalité comme suit :

$$1 = \prod_{j=s+1}^r q_j^{\beta_j}$$

Puisque les q_j sont strictement supérieurs à 1 est que l'on exclu les puissances β_j égale à 0, on a nécessairement un produit vide, donc $r \leq s$. Ainsi $r = s$.

Nous avons rassemblé tous les éléments pour montrer que ces deux écritures sont identiques. Ainsi, tout nombre $n \geq 2$ admet une décomposition en facteur premier et cette décomposition est bien unique. $\square$

Exercices bonus.

Exercice bonus 1 : Une équation de Pell.

On souhaite montrer que l'équation $x^2 - 2y^2 = 1$ admet une infinité de solutions dans $\mathbb{N}^2$.

- (1) Montrer qu'il existe deux suites d'entiers naturels $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (3 + 2\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$$

- (2) Que dire de $(3 - 2\sqrt{2})^n$?

(3) Conclure.

Exercice bonus 2 : Irrationalité de e .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_n = \int_0^1 e^x x^n dx$$

- (1) Montrer que $I_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.
- (2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(a_n, b_n) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $I_n = a_n e + b_n$.
- (3) En déduire que $e \notin \mathbb{Q}$.

Exercice bonus 3 : une inégalité exotique.

Soit $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$. Montrer qu'il existe $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$ tel que :

$$\left| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i z_i \right| \leq \sqrt{2} \max_{1 \leq i \leq n} |z_i|$$

Montrer également qu'il existe $(\delta_1, \dots, \delta_n) \in \{-1, 1\}^n$ tel que :

$$\left| \sum_{i=1}^n \delta_i z_i \right| \geq \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^n |z_i|$$

Solutions.

Exercice bonus 1.

- (1) On pourrait appliquer la formule du binôme de Newton pour déterminer directement les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ recherchées. Cependant, une démonstration par récurrence fera apparaître quelque chose d'important pour la suite de cet exercice. On pose donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n) : \text{"il existe } (a_n, b_n) \in \mathbb{N}^2 \text{ tel que } (3 + 2\sqrt{2})^n = a_n + b_n \sqrt{2} \text{"}$$

- $(3 + 2\sqrt{2})^0 = 1$ donc on pose $(a_0, b_0) = (1, 0)$, et $(3 + 2\sqrt{2})^1 = 3 + 2\sqrt{2}$ donc on pose $(a_1, b_1) = (3, 2)$. Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies.
- Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n \in \mathbb{N}$ (on pose alors $(a_n, b_n) \in \mathbb{N}^2$ adéquat). On a donc :

$$(3 + 2\sqrt{2})^{n+1} = (a_n + b_n \sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2}) = 3a_n + 4b_n + (2a_n + 3b_n)\sqrt{2}$$

On pose alors $(a_{n+1}, b_{n+1}) = (3a_n + 4b_n, 2a_n + 3b_n)$. Ceci est bien un élément de $\mathbb{N}^2$ car (a_n, b_n) est un couple d'entiers. Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Cette récurrence montre donc l'existence des suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mais aussi les définit par récurrence mutuelle :

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} : \begin{cases} a_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = 3a_n + 4b_n \end{cases} \quad \text{et} \quad (b_n)_{n \in \mathbb{N}} : \begin{cases} b_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, b_{n+1} = 2a_n + 3b_n \end{cases}$$

Ces définitions ainsi que les deux premières valeurs de la suite $(a_n, b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ déterminées lors de l'initialisation permettent d'affirmer que $(a_n, b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de $\mathbb{N}^2$ strictement croissante, donc injective. Cela nous sera utile pour la conclusion. $\square$

- (2) Pour ce qui est du calcul de $(3 - 2\sqrt{2})^n$, puisque la "partie $\sqrt{2}$ " change de signe, essayons de démontrer ce résultat : " $\exists (a'_n, b'_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{N}^2)^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, (3 - 2\sqrt{2})^n = a'_n - b'_n \sqrt{2}$ " (ce dernier est intuitif par analogie avec le résultat précédent). Il suffit alors de reconduire l'exacte même preuve que précédemment, en posant $\mathcal{P}$ la proposition adaptée sur $\mathbb{N}$:

- $(3 - 2\sqrt{2})^0 = 1$ donc on pose $(a'_0, b'_0) = (1, 0)$, et $(3 - 2\sqrt{2})^1 = 3 - 2\sqrt{2}$ donc on pose $(a'_1, b'_1) = (3, 2)$. Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies.

— Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n \in \mathbb{N}$ (on pose alors $(a'_n, b'_n) \in \mathbb{N}^2$ adéquat). On a donc :

$$(3 - 2\sqrt{2})^{n+1} = (a'_n - b'_n\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2}) = 3a'_n + 4b'_n - (2a_n + 3b_n)\sqrt{2}$$

On pose alors $(a'_{n+1}, b'_{n+1}) = (3a_n + 4b_n, 2a_n + 3b_n)$. Ceci est bien un élément de $\mathbb{N}^2$ car (a_n, b_n) est un couple d'entiers. Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On remarque alors que l'on vient à nouveau de construire la suite $(a_n, b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par récurrence. Ainsi, par identification, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (3 - 2\sqrt{2})^n = a_n - b_n\sqrt{2}$$

□

(3) En conclusion, nous avons les deux résultats suivants :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (3 + 2\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}, (3 - 2\sqrt{2})^n = a_n - b_n\sqrt{2}$$

On gardant en tête l'objectif de l'exercice, on est en droit de s'intéresser à la quantité suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n^2 - 2b_n^2 = (a_n + b_n\sqrt{2})(a_n - b_n\sqrt{2}) = (3 + 2\sqrt{2})^n(3 - 2\sqrt{2})^n = (3^2 - (2\sqrt{2})^2)^n = 1^n = 1$$

Par injectivité de la suite $(a_n, b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on a en effet démontré qu'il existe une infinité de solutions de $x^2 - 2y^2 = 1$ dans $\mathbb{N}^2$.

Exercice bonus 2.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 e^x x^n dx$

(1) On peut déjà remarquer que $e^x x^n \geq e^x x^{n+1} \geq 0$ sur $[0, 1]$ et ce pour tout $n \in \mathbb{N}$. De même, $e^x x^n \leq e x^n$ sur $[0, 1]$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \leq e \int_0^1 x^n dx = \frac{e}{n+1}$. Ainsi, $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante minorée par 0 est majorée par une suite tendant vers 0. On a donc bien :

$$I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

□

(2) En effectuant une intégration par partie où l'on intègre e^x et où l'on dérive x^n , on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = e - \int_0^1 n e^x x^{n-1} dx = e - n I_{n-1}$$

Le résultat attendu se montrer donc par récurrence. On a déjà $I_0 = e - 1$ et $I_1 = e - (e - 1) = 1$. La propriété est donc vraie, avec $(a_0, b_0) = (1, 0)$ et $(a_1, b_1) = (0, 1)$. Supposons maintenant la propriété vraie pour $n \in \mathbb{N}$. On a alors :

$$I_n = e - n I_{n-1} = e - n(a_{n-1}e + b_{n-1}) = (1 - na_{n-1})e - nb_{n-1}$$

Puisque $(a_n, b_n) \in \mathbb{Z}^2$, on a $((1 - na_{n-1}), -nb_{n-1}) \in \mathbb{Z}^2$. Ainsi la propriété est vraie au rang $n+1$ avec $(a_{n+1}, b_{n+1}) = ((1 - na_{n-1}), -nb_{n-1})$. On a donc bien montré par récurrence le résultat attendu. □

(3) Supposons que e est rationnel. On pose donc $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $e = \frac{p}{q}$. On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = a_n \frac{p}{q} + b_n \iff \forall n \in \mathbb{N}, I_n q = a_n p + b_n q$$

Notons que $(a_n, b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{Z}^2)^{\mathbb{N}}$, donc que $(a_n p + b_n q)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$. Or, puisque $I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, la suite entière $(a_n p + b_n q)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0. Elle est donc nécessairement stagnante à partir d'un certain rang $N \in \mathbb{N}$, et on a :

$$\forall n \geq N, a_n p + b_n q = 0 \iff \forall n \geq N, a_n \frac{p}{q} = -b_n \iff \forall n \geq N, a_n e + b_n = I_n = 0$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, puisque $x \mapsto e^x x^n$ est continue, positive et non identiquement nulle sur $[0, 1]$, $I_n > 0$. On aboutit alors à une contradiction, ce qui prouve que e est irrationnel. □

Remarque : Ceci est un cas particulier du théorème de Niven-Parks.

Exercice bonus 3 :

- (1) Quitte à diviser par le maximum des modules, on peut toujours considérer $|z_1| = 1$ et pour tout $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$ on a $|z_k| \leq 1$. Sans perte de généralité, on peut aussi supposer que $z_1 = 1$ (multiplier la somme par $\bar{z}_1$ ne changera rien au module).

Nous nous placerons donc dans ces conditions et procéderons par récurrence. Le cas $n = 1$ est immédiat. Pour le cas $n = 2$, on fixe $\varepsilon_1 = 1$, et on fait en sorte que $\varepsilon_2 z_2$ ne se trouve pas dans le même demi-plan que 1. En effet, si z_2 s'y trouve, on prend $\varepsilon_2 = -1$ pour le ramener dans l'autre demi-plan. Sinon on prend $\varepsilon_2 = 1$.

Après avoir adapté z_2 comme précédemment, le module considéré est $|1 + \varepsilon_2 z_2|$ où $\varepsilon_2 z_2$ est de la forme $-re^{i\theta}$ avec $(r, \theta) \in [0, 1] \times [-\pi/2, \pi/2]$. Notre but est donc maintenant de montrer :

$$\alpha := \sup_{(r, \theta) \in [0, 1] \times [-\pi/2, \pi/2]} |1 - re^{i\theta}| \leq \sqrt{2}$$

Mettons les deux expressions au carré et exploitons la relation $|z|^2 = z\bar{z}$. Cela revient alors à montrer que pour tout $(r, \theta) \in [0, 1] \times [-\pi/2, \pi/2]$:

$$f_\theta(r) = r^2 - 2r \cos(\theta) + 1 \leq 2$$

C'est un trinôme du second degré dont le coefficient devant le terme carré est positif, donc le maximum pour $r \in [0, 1]$ à θ fixé est atteint soit en $r = 0$ soit en $r = 1$. Or :

$$f_\theta(0) = 1 \text{ et } f_\theta(1) = 2(1 - \cos(\theta)) \leq 2 \quad (\theta \in [-\pi/2, \pi/2])$$

Donc le cas $n = 2$ a été montré. Supposons maintenant la proposition vraie au rang n . Puisque $n + 1 \geq 3$, on a affaire à au moins 6 points, à savoir les $\varepsilon_i z_i$ pour $1 \leq i \leq 3$. Ainsi, d'après le lemme des tiroirs, il existe $1 \leq i, j \leq n + 1$ avec $i \neq j$ tel que :

$$\left| \arg \left(\frac{z_i}{z_j} \right) \right| \leq \frac{\pi}{3}$$

Sans perte de généralité on suppose que $z_i = 1$ et que $\arg(z_j) \leq \pi/3$. On pose alors la même fonction $f_\theta(r)$ sauf que cette fois-ci on va considérer seulement $\theta \in [0, \pi/3]$. Alors on a :

$$f_\theta(0) = 1 \text{ et } f_\theta(1) \leq 1 - 1 + 1 = 1$$

Ainsi on peut, avec ε_i et ε_j bien choisis, $|\varepsilon_i z_i - \varepsilon_j z_j| \leq 1$, d'où l'hérédité. Ainsi, la proposition est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. $\square$

- (2) C'est subtil. On commence par un lemme assez facile à montrer :

Lemme : Soient $a < b$ deux réels et $\phi : \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ l'application qui à $f \mapsto \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$. Alors pour tout $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, il existe $\alpha \in [a, b]$ tel que $\phi(f) \leq f(\alpha)$.

Preuve : On raisonne par l'absurde en supposant que pour tout $x \in [a, b]$, on a $f(x) < \phi(f)$. Alors on a les inégalités suivantes qui s'enchaînent :

$$\int_a^b f(x) dx \leq (b-a)\phi(f) \iff \phi(f) < \phi(f)$$

Ce qui est évidemment absurde. Poursuivons alors la démonstration. La clef de la démonstration est de remarquer que pour tout $\theta \in [0, 2\pi[$ et $(\delta_1, \dots, \delta_n) \in \{-1, 1\}^n$ on a :

$$\left| e^{i\theta} \sum_{k=1}^n \delta_k z_k \right| = \left| \sum_{k=1}^n \delta_k z_k \right| \geq \left| \operatorname{Re} \left(e^{i\theta} \sum_{k=1}^n \delta_k z_k \right) \right|$$

Notons alors $z_k = |z_k| e^{i\theta_k}$ et posons $f : [0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^+$ l'application :

$$f : \theta \mapsto \sum_{k=1}^n |z_k| |\cos(\theta + \theta_k)|$$

f est continue et on a $\phi(f) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n |z_k|$. D'après le lemme, il existe alors $\theta_0 \in [0, 2\pi[$ tel que $f(\theta_0) \geq \phi(f)$. De ce fait, en prenant $\delta_k = \text{signe}(\cos(\theta + \theta_k))$ pour tout $k \in \mathbb{N}_n$, on déduit d'après la première inégalité que :

$$\left| \sum_{k=1}^n \delta_k z_k \right| \geq \left| \text{Re} \left(e^{i\theta_0} \sum_{k=1}^n \delta_k z_k \right) \right| \geq |f(\theta_0)| \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n |z_k|$$

Remarque : En reprenant exactement le même raisonnement, on peut également montrer qu'il existe $(\delta_1, \dots, \delta_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que l'inégalité soit vraie dans l'autre sens, en modifiant juste un peu le lemme.

□

SEMAINE 2

Questions de cours.

(1) Calculer $\sum_{k=0}^n k^2$.

(2) Calculer $\sum_{k=0}^n (-1)^k k^2$.

(3) Démontrer les formules en lien avec les coefficients binomiaux : pour tout $1 \leq k \leq n$:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \quad (k+1)\binom{n+1}{k+1} = (n+1)\binom{n}{k}, \quad \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

(4) Soit $n \geq 1$. Calculer $\sum_{1 \leq i, j \leq n} \max(i, j)$.

(5) Soit $n \geq 1$. Déterminer $\max_{1 \leq k \leq n} \binom{n}{k}$.

(6) Soit $n \geq 1$. Déterminer le produit des n premiers entiers pairs ainsi que le produit des n premiers entiers impaires.

Solutions.

(1) On procède par télescopage : on admet que $T_n = \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ quelque soit $n \geq 1$. Ainsi :

$$\sum_{k=0}^n (k+1)^3 - k^3 = (n+1)^3 = 3 \sum_{k=0}^n k^2 + 3T_n + n + 1$$

Tout calcul fait, on trouve $\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

(2) On va distinguer selon si n est pair ou pas. Si n est pair, on a $n = 2p$ pour un certain $p \geq 1$ (lorsque $n = 0$ la somme vaut 0). On a alors :

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k k^2 = \sum_{k=1}^p (2k)^2 - (2k-1)^2 = \sum_{k=1}^p 4k - 1 = \frac{4p(p+1)}{2} - p = \frac{n(n+1)}{2}$$

Si n est impair, alors $n = 2p + 1$ pour un certain $p \geq 0$. On trouve alors :

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k k^2 = \frac{4p(p+1)}{2} - p - n^2 = -\frac{n(n+1)}{2}$$

On en conclut que $\sum_{k=1}^n (-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$.

(3) Fixons $0 \leq k \leq n$ des entiers. Le premier est immédiat :

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Le second est également facile à obtenir :

$$\binom{n+1}{k+1} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-(k+1))!} = \frac{n+1}{k+1} \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n+1}{k+1} \binom{n}{k}$$

Le dernier est aussi facile à obtenir mais le calcul est un peu moins trivial (seulement un peu hein) : prenons d'abord $k \leq n-1$, $n \geq 1$; on traitera le cas $k = n$ et le cas $n = 0$ juste après :

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = n! \left(\frac{1}{k!(n-k)!} + \frac{1}{(k+1)!(n-k-1)!} \right) = n! \left(\frac{(n-k-1)!k!(n-k+k+1)}{k!(k+1)!(n-k)!(n-k-1)!} \right) = \binom{n+1}{k+1}$$

Lorsque $k = n$, la partie gauche de l'égalité vaut ainsi que la partie droite car $\binom{n}{k+1} = 0$ par convention. Le cas $n = 0$ est traité de façon similaire.

- (4) On remarque que $\Gamma = \llbracket 1, n \rrbracket^2$ se partitionne en une diagonale $D = \{(i, i), 1 \leq i \leq n\}$ puis $T^- = \{(i, j) \in \Gamma, i < j\}$ et $T^+ = \{(i, j) \in \Gamma, j < i\}$. On a alors :

$$\sum_{(i,j) \in \Gamma} \max(i, j) = \sum_{(i,j) \in D} i + \sum_{(i,j) \in T^+} i + \sum_{(i,j) \in T^-} j$$

Les variables i, j étant muettes, on a l'égalité $\sum_{(i,j) \in T^+} i = \sum_{(i,j) \in T^-} j$, donc :

$$\sum_{(i,j) \in \Gamma} \max(i, j) = \frac{n(n+1)}{2} + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} j$$

Or :

$$\sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} j = \sum_{j=2}^n j(j-1) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 1 - \frac{n(n+1)}{2} + 1 = \frac{n(n+1)(n-1)}{3}$$

$$\text{Donc } \sum_{(i,j) \in \Gamma} \max(i, j) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n-1)n(n+1)}{3} = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}.$$

- (5) Soit $n \geq 1$ fixé (le cas $n = 0$ est trivial), on pose pour tout $0 \leq k \leq n$, $u_k = \binom{n}{k}$. Soit alors $0 \leq k \leq n-1$. Observons :

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \times \frac{k!(n-k)!}{n!} = \frac{n-k}{k+1}$$

Ainsi :

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} \leq 1 \iff n-k \leq k+1 \iff \underbrace{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor}_a \leq k$$

Et inversement, $\frac{u_{k+1}}{u_k} \geq 1$ si et seulement si $k \leq \underbrace{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor}_b$. Ainsi, u_k est croissant sur $\llbracket 0, b \rrbracket$ et

décroissant sur $\llbracket b, n \rrbracket$. On en tire que u_k est maximal en $a = b$ lorsque n est impair, et en a ou b lorsque n est pair.

- (6) Soit $n \geq 1$. On commence avec le plus facile de deux : le produit des n premiers entiers pairs, qu'on note P_n . On a :

$$P_n = \prod_{k=1}^n (2k) = 2^n \prod_{k=1}^n k = 2^n n!$$

Le produit des n premiers impairs, que l'on note $I_n = \prod_{k=1}^n (2k-1)$, est légèrement plus subtil, mais il suffit de remarquer que :

$$I_n P_n = \prod_{k=1}^n (2k-1)2k = \prod_{k=1}^{2n} k = (2n)!$$

De ce fait, $I_n = \frac{(2n)!}{2^n n!}$.

Exercices. Premiers exercices.

Soit $n \geq 1$. Calculer les sommes/produits suivants :

Calculer les sommes suivantes pour $n \in \mathbb{N}$:

- | | | | |
|----------------------------|---|--------------------------------|--|
| (1) $\sum_{k=0}^n (-1)^k$ | (6) $\sum_{k=n+1}^{2n} 2^k$ | (11) $\prod_{k=1}^n k^2;$ | (16) $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right);$ |
| (2) $\sum_{k=2}^{n+1} k$ | (7) $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k$ | (12) $\prod_{k=n+1}^{2n} k^2;$ | (17) $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right);$ |
| (3) $\sum_{k=1}^n 2k$ | (8) $\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k}$ | (13) $\prod_{k=1}^n (2k+1);$ | (18) $\prod_{k=1}^n \frac{k+2}{k};$ |
| (4) $\sum_{k=n+1}^{2n} 2k$ | (9) $\prod_{k=-1000}^{1000} (k^2 - k);$ | (14) $\prod_{k=0}^n e^{-k};$ | (19) $\prod_{k=1}^n (4k^2 - 1);$ |
| (5) $\sum_{k=0}^n 2^k$ | (10) $\prod_{k=1}^n (2k);$ | (15) $\prod_{k=0}^n 2^k;$ | (20) $\prod_{k=1}^n (k(n+1-k));$ |

En deuxième exercice.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les deux sommes suivantes (pour les 3 dernières, on pourra considérer l'application $x \mapsto (1+x)^n$)

- | | | | |
|---|---|--|--|
| (1) $\sum_{1 \leq i, j \leq n} \max(i, j)$ | (5) $\sum_{1 \leq i, j \leq n} i - j $ | (9) $\sum_{k=1}^n k \cdot k!$ | (13) $\sum_{k=0}^n \sin(k\theta)$ |
| (2) $\sum_{1 \leq i, j \leq n} \min(i, j)$ | (6) $\sum_{i=0}^n \binom{n}{k}$ | (10) $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2 - 1}$ | (14) $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}$ |
| (3) $\sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{i}{i+j}$ | (7) $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k$ | (11) $\sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k}\right)$ | (15) $\sum_{k=0}^n 2^{2k} \binom{n}{k}$ |
| (4) $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j}$ | (8) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{k+1}$ | (12) $\sum_{k=0}^n \cos(k\theta)$ | (16) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(k\theta)$ |

En troisième exercice.

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \geq 2$, E un ensemble finie tel que $|E| = n$. Calculer les quatre expressions suivantes :

- | | | | |
|--|--|--|-------------------------------------|
| (1) $\prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{a}{2^k}\right)$ | (2) $\sum_{A, B \subseteq E} A \cap B $ | (3) $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}^2$ | (4) $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}^2$ |
|--|--|--|-------------------------------------|

En bonus/ également en troisième exercice

(1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $A \subseteq \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose $P(A) = \prod_{k \in A} k$. Calculer : $\sum_{A \subseteq \llbracket 1, n \rrbracket} \frac{1}{P(A)}$.

(2) Soit (a_n) et (b_n) deux suites réelles. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$— S_n = \sum_{k=0}^n a_k b_k \quad — A_n = \sum_{k=0}^n a_k$$

(a) Montrer que $S_n = A_n b_n + \sum_{k=0}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1})$

(b) En déduire le critère d'Abel : Si (b_n) est décroissant tendant vers 0 et la suite (A_n) est bornée, alors (S_n) converge.

(c) Montrer que pour tout $\theta \in]0, 2\pi[$, la suite suivante converge :

$$S_n(\theta) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin(k\theta)}{k}$$

(3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1 \leq \dots \leq a_n$ et $b_1 \leq \dots \leq b_n$ $2n$ réels. Montrer l'inégalité suivante, et décrire le cas d'égalité :

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \right) \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n b_k \right) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k b_k$$

Solutions. *Premiers exercices.*

(1) On utilise simplement la formule de la somme des termes d'une suite géométrique pour trouver que la somme vaut $1 + (-1)^n$.

(2) On peut écrire, en sommant à l'envers : $S = \sum_{k=0}^n k = \sum_{k=0}^n n - k = n(n+1) - S$. On en déduit que $S = n(n+1)/2$. De ce fait, en changeant juste les indices, la somme voulue vaut $n(n+1)/2 - 1 + n + 1 = n(n+3)/2$.

(3) On exploite la question précédente pour conclure que la somme vaut $n(n+1)$.

(4) On utilise peut récrire la somme comme $2 \left(\frac{2n(2n+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} \right) = 3n^2 + 3n$.

(5) On utilise la formule pour la somme des termes d'une suite géométrique pour trouver que la somme vaut $2^{n+1} - 1$.

(6) On utilise la même formule, pour trouver que la somme vaut $2^{n+1}(2^n - 1)$.

(7) On écrit : $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k = \sum_{k=0}^n 2k - \sum_{k=0}^n (2k-1) = n$.

(8) On remarque que c'est simplement la première réponse fois $(-1)^n$ car $(-1)^{-k} = (-1)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On obtient donc $(-1)^n + 1$.

(9) 0 fait partie des termes du produit (pour $k=0$ et $k=1$). Ainsi $\prod_{k=-1000}^{1000} (k^2 - k) = 0$

(10) On sépare le produits de 2 et celui des k : $\prod_{k=1}^n (2k) = \left(\prod_{k=1}^n 2 \right) \left(\prod_{k=1}^n k \right) = 2^n n!$

(11) Le produit de carrés étant le carré du produit, on a $\prod_{k=1}^n k^2 = \left(\prod_{k=1}^n k \right)^2 = n!^2$

(12) On écrit les termes manquant comme un inverse de produit pour retrouver deux factorielles :

$$\prod_{k=n+1}^{2n} k^2 = \left(\prod_{k=n+1}^{2n} k \right)^2 = \left(\frac{\prod_{k=1}^{2n} k}{\prod_{k=1}^n k} \right)^2 = \left(\frac{(2n)!}{n!} \right)^2$$

- (13) De même, on cherche à faire apparaître les factorielles en exprimant les termes manquant comme le retrait des nombres paires de 2 à $2n$:

$$\prod_{k=1}^n (2k+1) = \left(\frac{\prod_{k=1}^{2n+1} k}{\prod_{k=1}^n 2k} \right) = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$$

- (14) On utilise la formule du produit d'exponentielles :

$$\prod_{k=0}^n e^{-k} = \exp \left(- \sum_{k=0}^n k \right) = \exp \left(- \frac{n(n+1)}{2} \right)$$

- (15) De même, $\prod_{k=0}^n 2^k = 2^{\sum_{k=0}^n k} = 2^{n(n+1)/2}$

- (16) On remarque que $1 - \frac{1}{k} = \frac{k-1}{k}$, donc le produit est télescopique : $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k} \right) = \prod_{k=2}^n \frac{k-1}{k} = \frac{1}{n}$

- (17) À nouveau, on se ramène à un télescopage, un peu plus astucieux :

$$\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2} \right) = \prod_{k=2}^n \left(\frac{k^2-1}{k^2} \right) = \prod_{k=2}^n \left(\frac{(k+1)(k-1)}{k^2} \right) = \prod_{k=2}^n \left(\frac{(k+1)/k}{k/(k-1)} \right) = \frac{n+1}{2n}$$

- (18) De même, $\prod_{k=1}^n \frac{k+2}{k} = \prod_{k=1}^n \frac{(k+2)(k+1)}{(k+1)k} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$

- (19) On factorise l'identité remarquable pour retrouver (après changement d'indice dans le deuxième produit) deux produits calculés auparavant :

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^n (4k^2-1) &= \prod_{k=1}^n (2k+1)(2k-1) = \prod_{k=1}^n (2k+1) \prod_{k=1}^n (2k-1) = \prod_{k=1}^n (2k+1) \prod_{k=1}^{n-1} (2k+1) \\ &= \frac{(2n+1)!}{2^n n!} \frac{(2n-1)!}{2^{n-1} (n-1)!} = \frac{(2n+1)!(2n-1)!}{2^{2n-1} n! (n-1)!} \end{aligned}$$

- (20) On sépare ici en deux produit pour ensuite effectuer un changement d'indice sur le deuxième. On retrouve alors un résultat connu :

$$\prod_{k=1}^n (k(n+1-k)) = \prod_{k=1}^n k \prod_{k=1}^n (n+1-k) = \prod_{k=1}^n k \prod_{k=1}^n k = n!^2$$

□

Deuxième exercices.

- (1) L'idée ici est de séparer les indices, i.e. pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ fixé, on somme sur $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i, j \leq n} \max(i, j) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \max(i, j) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^i i + \sum_{j=i+1}^n j \right) = \sum_{i=1}^n \left(i^2 + \frac{n(n+1) - i(i+1)}{2} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n i^2 + \frac{n(n+1)}{2} \sum_{i=1}^n 1 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n i \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} + \frac{n^2(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{4} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6n^2(n+1) - 3n(n+1)}{12} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1+6n-3)}{12} = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6} \end{aligned}$$

□

- (2) Pour ce deuxième calcul, soyons astucieux en utilisant le résultat précédent et en remarquant cette identité :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}_n^2, \min(i, j) = n - \max(n - i, n - j)$$

De plus, en sommant "à l'envers", on peut remarquer que :

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} \max(n - i, n - j) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \max(i - 1, j - 1) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \max(i, j) - \sum_{1 \leq i, j \leq n} 1$$

En effet, $\max(i - 1, j - 1) = \max(i, j) - 1$. On a donc :

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i, j \leq n} \min(i, j) &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} n - \sum_{1 \leq i, j \leq n} \max(i, j) + \sum_{1 \leq i, j \leq n} 1 \\ &= n^3 - \frac{n(n+1)(4n-1)}{6} + n^2 \\ &= \frac{6n^3 + 6n^2 - 4n^3 - 3n^2 + n}{6} \\ &= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{6} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

Il est alors intéressant de remarquer que l'on retrouve le résultat du calcul de la somme des n premiers carrés. $\square$

- (3) Pour calculer cette somme, on fait d'abord apparaître quelque chose d'intéressant :

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{i}{i+j} = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \left(1 - \frac{j}{i+j}\right) = n^2 - \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{j}{i+j}$$

Or, dans les sommes du type $\sum_{a \leq i, j \leq b} f(i, j)$ où f est une fonction bien définie en tout couple de $\llbracket a, b \rrbracket^2$, les indices i et j jouent des rôles symétriques puisque tous deux balayent le même ensemble, étant ici $\llbracket a, b \rrbracket$. On peut donc identifier : $\sum_{a \leq i, j \leq b} f(i, j) = \sum_{a \leq i, j \leq b} f(j, i)$ (Attention : cette

identification n'est plus vraie si les bornes de i dépendent de j ou inversement). On a ainsi :

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{i}{i+j} = n^2 - \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{j}{i+j} = n^2 - \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{i}{i+j}$$

Cela nous amène donc au résultat : $\sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{i}{i+j} = \frac{n^2}{2}$ $\square$

- (4) Pour calculer cette somme, il suffit de séparer les indices, en gardant en tête que cette fois-ci l'indice i doit être strictement inférieur à l'indice j :

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{i}{j} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{j-1} \frac{i}{j} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \frac{j(j-1)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n j - \frac{n}{2} = \frac{n(n-1)}{4}$$

$\square$

- (5) Pour résoudre astucieusement ce calcul de somme, on peut à nouveau utiliser les résultats sur les sommes de min et de max en remarquant que $|i - j| = \max(i, j) - \min(i, j)$. On a donc directement :

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i, j \leq n} |i - j| &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} \max(i, j) - \sum_{1 \leq i, j \leq n} \min(i, j) \\ &= \frac{n(n+1)(4n-1)}{6} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{n(n+1)(n-1)}{3} \end{aligned}$$

$\square$

Pour les prochains calculs, nous allons en effet nous baser sur des évaluation de $b : x \mapsto (1+x)^n$ et autres fonctions associées. On rappelle que pour tout réel x , $b(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$.

(6) Ici, on évalue b en $x = 1$ pour faire disparaître le termes en x^k dans la somme :

$$b(1) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n \iff \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

□

(7) Pour ce calcul, il faut preuve d'astuce et de lucidité, en se posant la question "Comment faire apparaître un facteur k dans une somme issu de b ?". Puisque le facteur k n'est présent qu'en exposant de x , une solution serait de dériver, pour faire "descendre" ce facteur. b étant polynomiale, elle est bien dérivable, et en dérivant d'une part la forme "factorisée" de b puis d'autre part la forme "développée" de b , on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, b'(x) = n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k x^{k-1}$$

(On se permet d'enlever le cas $k = 0$ car le terme correspondant est nul). Ainsi, on peut évaluer b' en $x = 1$ pour parvenir à la valeur de la somme recherchée :

$$b'(1) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k 1^{k-1} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k = n(1+1)^{n-1} = n2^{n-1} \iff \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k = n2^{n-1}$$

□

(8) À nouveau, il faut trouver une solution pour faire apparaître un facteur $\frac{1}{k+1}$ dans une somme issu de b . Étant donné que nous avons dérivé pour obtenir un facteur k , il faudrait ici faire le chemin inverse. Nous allons donc trouver une primitive de b , et nous prenons celle nulle en 0 :

$$B : x \mapsto \frac{(1+x)^{n+1} - 1}{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

(L'égalité provient de l'identification des primitives nulles en 0 de la forme "factorisée" et de la forme "développée" de b). On obtient donc, à nouveau en évaluant en $x = 1$:

$$B(1) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{k+1} = \frac{(1+1)^{n+1} - 1}{n+1} = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$$

On a donc montrer l'identité suivante : $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{k+1} = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$

□

(9) On remarque que $k \cdot k! = (k+1-1)k! = (k+1)! - k!$ pour conclure que la somme vaut $(n+1)! - 1$.

(10) On écrit $\frac{1}{k^2-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$ pour terminer le télescopage : on trouve $\frac{3}{4} - \frac{2n+1}{2n(n+1)}$.

(11) $\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln(k+1) - \ln(k)$ donc la somme vaut $\ln(n+1)$.

(12) Il faut exploiter la linéarité de la partie réelle :

$$\sum_{k=0}^n \cos(k\theta) = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=0}^n e^{ik\theta} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{e^{i(n+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ e^{in\theta/2} \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \right\} = \frac{\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

(13) C'est les mêmes calculs qu'à la question précédente, sauf qu'au final on prend la partie imaginaire.

On trouve alors $\frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$.

(14) On utilise la formule du binôme : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$, valable pour tout $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}$. En prenant $a = -b = 1$, on obtient que la somme vaut 0.

(15) $2^{2k} = 4^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On exploite alors la formule du binôme pour obtenir que la somme vaut 5^n .

(16) Ici, on exploite la formule du binôme sur des nombres complexes.

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(\theta k) = \operatorname{Re}\{(1 + e^{i\theta})^n\} = \operatorname{Re}\{2^n e^{\frac{in\theta}{2}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)^n\} = 2^n \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)^n$$

En troisième exercice. _____

(1) Soit $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. On utilise la formule $\sin(2\theta) = 2 \cos(\theta) \sin(\theta)$ pour $\theta = a/2^k$ pour $1 \leq k \leq n$. On en déduit :

$$\prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{a}{2^k}\right) = \prod_{k=1}^n \frac{\sin(a/2^{k-1})}{2 \sin(a/2^k)} = \frac{\sin(a)}{2^n \sin(a/2^n)}$$

(2) Celui ci est plus délicat. Il faut remarquer qu'on peut fixer le cardinal afin d'avoir :

$$\sum_{A, B \subset E} |A \cap B| = \sum_{k=0}^n k \sum_{\substack{(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2 \\ |A \cap B| = k}} 1$$

Il faut donc faire quelques constats. Tout d'abord, il y a $\binom{n}{k}$ parties de E ayant k éléments. Soit donc $\Gamma \subset E$ tel que $|\Gamma| = k$. On cherche à dénombrer l'ensemble des couples $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$ vérifiant $A \cap B = \Gamma$. Ceci est équivalent à trouver tout les couples $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$ tel que $\overline{A \cup B} = \overline{\Gamma}$. On a donc l'égalité des cardinaux suivant :

$$|\{(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2, A \cap B = \Gamma\}| = |\{(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2, A \cup B = \overline{\Gamma}\}|$$

Pour compter tout les couples vérifiant ce dernier, il faut remarquer que (A, B) vérifie la condition souhaité si et seulement si tout élément de $\overline{\Gamma}$ est soit dans A , soit dans B , soit dans les 2 : il y a donc 3 cas possibles par éléments, et puisque $|\overline{\Gamma}| = n - k$ on en déduit que :

$$|\{(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2, A \cup B = \overline{\Gamma}\}| = 3^{n-k}$$

On a donc largement simplifié la tâche :

$$\sum_{A, B \subset E} |A \cap B| = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k 3^{n-k}$$

Cette somme se calcul facilement ; en dérivant $x \mapsto (1+x)^n$, on trouve :

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k x^{k-1}$$

En prenant $x = 1/3$ on trouve :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k 3^{-k+1} = n 4^{n-1} 3^{1-n} \iff \sum_{(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2} |A \cap B| = n 4^{n-1}$$

□

(3) Il faut considérer le polynôme $P(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n$. Alors :

$$P(x)P(-x) = \sum_{k=0}^{2n} x^k \sum_{h=0}^k (-1)^h \binom{n}{h} \binom{n}{k-h} = (1-x^2)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k x^{2k}$$

Ainsi en regardant le coefficient devant le terme en x^n dans le produit, on trouve que si n est impaire la somme est nulle, tandis que si n est paire et $n = 2p$, on a :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 (-1)^k = \binom{2p}{p} (-1)^p$$

Autrement dit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 (-1)^k = \begin{cases} 0 & \text{si } n \equiv 1[2] \\ \binom{2p}{p} (-1)^p & \text{si } n \equiv 0[2], n = 2p \end{cases}$$

□

(4) On reprend le même polynôme que dans la question précédente et on calcul :

$$P(x)P'(x) = \sum_{k=0}^{2n-1} x^k \sum_{h=0}^k h \binom{n}{h} \binom{n}{k-h} = n(1+x)^{2n-1} = n \sum_{k=0}^{2n-1} \binom{2n-1}{k} x^k$$

Ainsi en comparant le coefficient devant x^n dans les deux expressions, on trouve :

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}^2 = n \binom{2n-1}{n}$$

□

En bonus/également en troisième exercice

(1) Si l'on essaye de résoudre cette exercice tête baissée, par exemple en essayant d'exprimer la somme différemment par dénombrement, on aboutit à peu. Prenons donc un peu de recul, en commençant par calculer la somme pour les premières valeurs de n :

- Pour $n = 1$, les parties A se résument à $\emptyset$ et $\{1\}$, donc les $P(A)$ sont 1 (produit vide) et 1. On trouve donc une somme égale à 2.
- Pour $n = 2$, on considère déjà traités les cas des parties de $\{1\}$, menant à une somme valant 2. Les nouvelles parties sont alors $\{2\}$ et $\{1, 2\}$, ce qui donne 2 et 2 pour les nouvelles valeurs possibles de $P(A)$. On obtient donc une somme totale valant $2 + 1/2 + 1/2 = 3$.
- Faisons le une dernière fois, pour $n = 3$. À nouveau, on considère déjà traités les cas des parties de $\llbracket 1, 2 \rrbracket$, menant à une somme valant 3. Les nouvelles parties sont alors $\{3\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$ et $\{1, 2, 3\}$, ce qui donne 3, 3, 6 et 6 pour les nouvelles valeurs possibles de $P(A)$. On obtient donc une somme totale valant $3 + 1/3 + 1/3 + 1/6 + 1/6 = 4$.

Les trois premières valeur de la suite $\left(\sum_{A \subseteq \llbracket 1, n \rrbracket} \frac{1}{P(A)} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont donc 2, 3 et 4.

Il est alors temps de faire une conjecture assez audacieuse compte tenu de la complexité du problème :

$$\text{Conjecture : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{A \subseteq \llbracket 1, n \rrbracket} \frac{1}{P(A)} = n + 1$$

Cette conjecture étant déjà vérifiée pour les trois premiers rangs, montrons qu'elle est héréditaire. On la suppose donc vraie au rang $n \in \mathbb{N}^*$. Pour le calcul de la somme du rang $n + 1$, nous allons

procéder comme dans les calculs des premières valeurs, en extrayant la somme du rang n et en rajoutant le reste. Puisque ici le reste correspond à la somme sur $A \in \mathcal{P}(\llbracket 1, n+1 \rrbracket) \setminus \mathcal{P}(\llbracket 1, n \rrbracket) = \mathcal{P}(\llbracket 1, n \rrbracket) \cup \{n+1\}$:

$$\begin{aligned} \sum_{A \subseteq \llbracket 1, n+1 \rrbracket} \frac{1}{P(A)} &= \sum_{A \subseteq \llbracket 1, n \rrbracket} \frac{1}{P(A)} + \sum_{A \subseteq \llbracket 1, n \rrbracket} \frac{1}{P(A \cup \{n+1\})} \\ &= n+1 + \sum_{A \subseteq \llbracket 1, n \rrbracket} \frac{1}{(n+1)P(A)} \\ &= n+1 + \frac{n+1}{n+1} = n+2 \end{aligned}$$

La conjecture est donc démontrée par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{A \subseteq \llbracket 1, n \rrbracket} \frac{1}{P(A)} = n+1$. $\square$

(2) (a) L'idée est d'écrire $a_k = A_k - A_{k-1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et $a_0 = A_0$. On a alors :

$$\begin{aligned} S_n &= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^n (A_k - A_{k-1}) b_k = a_0 b_0 + \sum_{k=1}^n A_k b_k - \sum_{k=1}^n A_{k-1} b_k \\ &= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^n A_k b_k - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_{k+1} = A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_0 b_0 - A_0 b_1 \\ &= A_n b_n + \sum_{k=0}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) \end{aligned}$$

Il est intéressant d'interpréter la somme des termes d'une suite comme une intégration discrète (méthode des rectangles de largeur unité). Ainsi, le calcul de S_n n'est rien d'autre qu'une intégration par partie de la suite $(a_n b_n)_{n \in \mathbb{N}}$. $\square$

(b) Supposons $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendant vers 0 de manière décroissante et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bornée. On pose alors $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $|A_n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puisque dans ces conditions $(b_n - b_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est positive on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n-1} |A_k (b_k - b_{k+1})| \leq M \sum_{k=0}^{n-1} (b_k - b_{k+1})$$

Or, $\left(\sum_{k=0}^{n-1} (b_k - b_{k+1}) \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est de même nature que la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, convergente ici. Donc, par

comparaison de séries à termes positifs, $\left(\sum_{k=0}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est absolument convergente, donc convergente. Enfin, puisque $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, $(A_n b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge aussi (vers 0).

Ainsi, $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une somme de deux suites convergentes. Elle est donc convergente. $\square$

(c) On se place ici dans les conditions d'application du critère d'Abel, où $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\sin(n\theta))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} = (1/n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien décroissante et convergente vers 0. Montrons maintenant que $(A_n = \sum_{k=1}^n \sin(k\theta))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée. Or on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^n \sin(k\theta) = \operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^n e^{ik\theta} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{1 - e^{in\theta}}{1 - e^{i\theta}} e^{i\theta} \right)$$

(On rappelle que $\theta \in]0, 2\pi[\implies e^{i\theta} \neq 1$) On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^n \sin(k\theta) = \operatorname{Re} \left(e^{in\theta/2} e^{i\theta/2} \frac{e^{in\theta/2} - e^{-in\theta/2}}{e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2}} \right) = \operatorname{Re} \left(e^{i(n+1)\theta/2} \frac{\sin(n\theta/2)}{\sin(\theta/2)} \right)$$

(On rappelle que $\theta \in]0, 2\pi[\implies \sin(\theta/2) \neq 0$) Enfin, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^n \sin(k\theta) = \frac{\sin(n\theta/2) \sin((n+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)}$$

Ainsi, $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée, et un majorant optimal de sa valeur absolue est $1/\sin(\theta/2)$. On peut donc conclure, d'après le critère d'Abel sur les séries numériques démontré précédemment, que la suite $\left(\sum_{k=1}^n \frac{\sin(k\theta)}{k}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge pour tout $\theta \in]0, 2\pi[$. $\square$

- (3) C'est astucieux. Il faut exploiter le fait que pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $i \leq j \implies a_i \leq a_j$ et $b_i \leq b_j$. Ainsi, le produit $(a_i - a_j)(b_i - b_j) \geq 0$ pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On en déduit :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_i - a_j)(b_i - b_j) \geq 0 \iff \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_i b_i + a_j b_j - a_i b_j - a_j b_i) \geq 0$$

En regroupant les termes et en divisant par deux, on trouve :

$$n \sum_{i=1}^n a_i b_i \geq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i b_j = \left(\sum_{i=1}^n a_i\right) \left(\sum_{j=1}^n b_j\right)$$

Ce qui, en divisant par n^2 , fournit l'inégalité recherchée. $\square$

SEMAINE 3

Questions de cours.

- (1) Énoncer et démontrer l'inégalité triangulaire pour les nombres complexes avec son cas d'égalité.
- (2) Soit $t \in \mathbb{R}$. Calculer $\sum_{k=0}^n \sin(kt)$.
- (3) Soit $n \geq 1$. Linéariser $\theta \mapsto \cos(\theta)^n$.
- (4) Pour $P \in \mathbb{C}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{C}$ racine de P , montrer que P se factorise par $z - \alpha$.
- (5) Soit $n \geq 1$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(1+z)^n = z^n$.
- (6) Soit $(p, q) \in \mathbb{C}^2$. Factoriser $\cos(p) \pm \cos(q)$ et $\sin(p) \pm \sin(q)$.

Solutions.

- (1) L'énoncé attendu est le suivant : soit $n \geq 1$, $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ des complexes. Alors :

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k|$$

On se contente de montrer le résultat pour $n = 2$ (ça se généralise ensuite facilement par récurrence qui est tout à fait trivial), et on examinera le cas d'égalité à la suite de la démonstration. Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. Il faut montrer que $|a+b| \leq |a| + |b|$.

$$|a+b|^2 = (a+b)(\bar{a} + \bar{b}) = |a|^2 + |b|^2 + 2\operatorname{Re}(a\bar{b})$$

Or, quelque soit $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(z) \leq |z|$. De ce fait :

$$|a+b|^2 \leq (|a| + |b|)^2 \iff |a+b| \leq |a| + |b|$$

On en tire que le cas d'égalité se produit lorsque $\operatorname{Re}(a\bar{b}) = |a||b|$, c'est à dire $a\bar{b} \in \mathbb{R}$ et $a\bar{b} \geq 0$. En écrivant $a = r(a)e^{i\theta(a)}$ et $b = r(b)e^{i\theta(b)}$ les écritures polaires de a et b on en déduit que nécessairement $\theta(a) \equiv \theta(b)[2\pi]$, c'est à dire que a et b ont le même argument, c'est à dire que a, b sont alignés, dans le même quadrant. Cette propriété se propage lors de la récurrence ; il faut et il suffit que $\arg(z_1) = \dots = \arg(z_n)$.

- (2) C'est facile quand on passe par les complexes ! Si $t \equiv 0[\pi]$ la somme vaut 0. Sinon, par linéarité de la partie imaginaire, en notant $S_n = \sum_{k=0}^n \sin(kt)$:

$$S_n = \operatorname{Im} \left(\sum_{k=0}^n e^{ikt} \right) = \operatorname{Im} \left(\frac{e^{i(n+1)t} - 1}{e^{it} - 1} \right) = \operatorname{Im} \left(e^{\frac{int}{2}} \frac{\sin \left(t \frac{n+1}{2} \right)}{\sin \left(\frac{t}{2} \right)} \right) = \frac{\sin \left(\frac{nt}{2} \right) \sin \left(\frac{(n+1)t}{2} \right)}{\sin \left(\frac{t}{2} \right)}$$

Exercices.*En premier exercice*

- (1) Soit $n \geq 1$. Déterminer tout les couples de polynômes $(P_n, Q_n) \in \mathbb{R}[X]^2$ vérifiant quelque soit $\theta \in [0, 2\pi]$, $P_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$ et $Q_n(\sin(\theta)) = \sin(n\theta)$.
- (2) Déterminer la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$
- (3) Soit $(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$. Montrer que les points d'affixes z_1, z_2, z_3 dans le plan complexe forment un triangle équilatéral si et seulement si $z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$.
- (4) On pose $\Gamma = \left\{ z \in \mathbb{C}^*, z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R} \right\}$. Montrer que $\Gamma = \mathbb{R}^* \cup \mathbb{U}$.
- (5) Calculer $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.
- (6) Calculer $\sum_{\substack{k=0 \\ k \equiv 0[3]}}^n \binom{n}{k}$.
- (7) Résoudre pour $z \in \mathbb{C}$ l'équation $(1-z)^{2n} = (1+z)^{2n}$.

Peu de gens ont réussi à passer le premier exercice. J'ai donné la démonstration de Cauchy du problème de Bâle à un élève qui a particulièrement bien réussi, dont l'énoncé est très classique.

Solutions.

- (1) Intéressons nous tout d'abord aux polynômes P_n . D'après la formule de De Moivre, on a :

$$\forall \theta \in [0, 2\pi[, \cos(n\theta) = \operatorname{Re}(e^{in\theta}) = \operatorname{Re}((\cos \theta + i \sin \theta)^n)$$

En développant grâce au binôme de Newton, on obtient :

$$\forall \theta \in [0, 2\pi[, \cos(n\theta) = \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} i^k \sin(\theta)^k \cos(\theta)^{n-k} \right)$$

On doit maintenant sélectionner seulement les indices k tels que $i^k \in \mathbb{R}$, donc les indices paires :

$$\forall \theta \in [0, 2\pi[, \cos(n\theta) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} (-1)^k \sin(\theta)^{2k} \cos(\theta)^{n-2k} = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} (-1)^k (1 - \cos^2(\theta))^k \cos(\theta)^{n-2k}$$

Ainsi, on peut pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} (-1)^k (1 - X^2)^k X^{n-2k}$$

Si l'on prend maintenant la partie imaginaire dès le début du raisonnement, avec cette fois $n+1$ dans les calculs, on obtient :

$$\forall \theta \in [0, 2\pi[, \sin((n+1)\theta) = \operatorname{Im}((\cos \theta + i \sin \theta)^{n+1}) = \operatorname{Im} \left(\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} i^k \sin(\theta)^k \cos(\theta)^{n+1-k} \right)$$

Ici, on prend les indices impaires :

$$\begin{aligned} \forall \theta \in [0, 2\pi[, \sin((n+1)\theta) &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n+1}{2k+1} (-1)^k \sin(\theta)^{2k+1} \cos(\theta)^{n-2k} \\ &= \sin(\theta) \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n+1}{2k+1} (-1)^k (1 - \cos^2(\theta))^k \cos(\theta)^{n-2k} \end{aligned}$$

On a donc trouver une solutions pour les polynômes Q_n :

$$\forall n \in \mathbb{N}, Q_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n+1}{2k+1} (-1)^k (1-X^2)^k X^{n-2k}$$

Ces polynômes sont alors adéquats, mais montrons qu'ils sont uniques pour n fixé. Supposons dans un premier temps qu'il existe R_n vérifiant :

$$\forall \theta \in [0, 2\pi[, R_n(\cos \theta) = \cos(n\theta) = P_n(\cos \theta) \iff \forall \theta \in [0, 2\pi[, (R_n - P_n)(\cos \theta) = 0$$

Ainsi, $P_n - R_n$ est un polynôme possédant une infinité de racines, il est donc nul, donc $P_n = R_n$.

De même, supposons qu'il existe S_n vérifiant :

$$\forall \theta \in [0, 2\pi[, \sin(\theta)S_n(\cos \theta) = \sin((n+1)\theta) = \sin(\theta)Q_n(\cos \theta) \iff \forall \theta \in]0, 2\pi[\setminus \{\pi\}, (S_n - Q_n)(\cos \theta) = 0$$

À nouveau, on peut en conclure que $S_n = Q_n$.

Finalement, nous avons déterminé l'unique famille de couples de polynômes $(P_n, Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ recherchée. Ces polynômes sont d'ailleurs appelés respectivement polynômes de Tchebychev de première et seconde espèce. $\square$

- (2) Je présente ici le corrigé d'un collègue qui ne voulait pas passer par les nombres complexes mais par une méthode plus brutale. J'encourageai les élèves en colle à essayer de trouver le polynôme minimal de $\cos(2\pi/5)$ afin de déterminer la valeur de $\cos(\pi/10)$ par une formule d'angle double.

L'idée est de développer la fonction $\theta \mapsto \cos(5\theta)$ en puissances de cosinus. En effet, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} \cos(5\theta) &= \cos(\theta + 4\theta) = \cos(\theta) \cos(4\theta) - \sin(\theta) \sin(4\theta) = \cos(\theta)(2 \cos(2\theta)^2 - 1) - 2 \sin(\theta) \sin(2\theta) \cos(2\theta) \\ &= \cos(\theta)(2(2 \cos(\theta)^2 - 1)^2 - 1) - 4 \sin(\theta)^2 \cos(\theta)(2 \cos(\theta)^2 - 1) \\ &= \cos(\theta)(8 \cos(\theta)^4 - 8 \cos(\theta)^2 + 1) - 4 \cos(\theta)(1 - \cos(\theta)^2)(2 \cos(\theta)^2 - 1) \\ &= \cos(\theta)(8 \cos(\theta)^4 - 8 \cos(\theta)^2 + 1 - 4(3 \cos(\theta)^2 - 1 - 2 \cos(\theta)^4)) \\ &= \cos(\theta)(16 \cos(\theta)^4 - 20 \cos(\theta)^2 + 5) \end{aligned}$$

Or, $\cos(\pi/2) = \cos(5 \cdot \pi/10) = 0$, et puisque $\pi/10 \in]0, \pi/2[$, on a $\cos(\pi/10) > 0$. On en conclue que $\cos(\pi/10)$ est racine du polynôme suivant :

$$16x^4 - 20x^2 + 5 = 16X^2 - 20X + 5 \text{ où } X = x^2$$

Le discriminant du polynôme de droite est $\Delta = 80$, donc on obtient :

$$\cos(\pi/10)^2 = \frac{20 + \sqrt{80}}{32} = \frac{5 + \sqrt{5}}{8} \text{ ou } \cos(\pi/10)^2 = \frac{5 - \sqrt{5}}{8}$$

On remarque que $5 - \sqrt{5} < 3$ donc on aurait, en choisissant la deuxième racine :

$$\cos(\pi/10) < \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} < \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos(\pi/6)$$

Or, cela contredit la décroissance du cosinus sur $]0, \pi/2[$. On peut donc conclure :

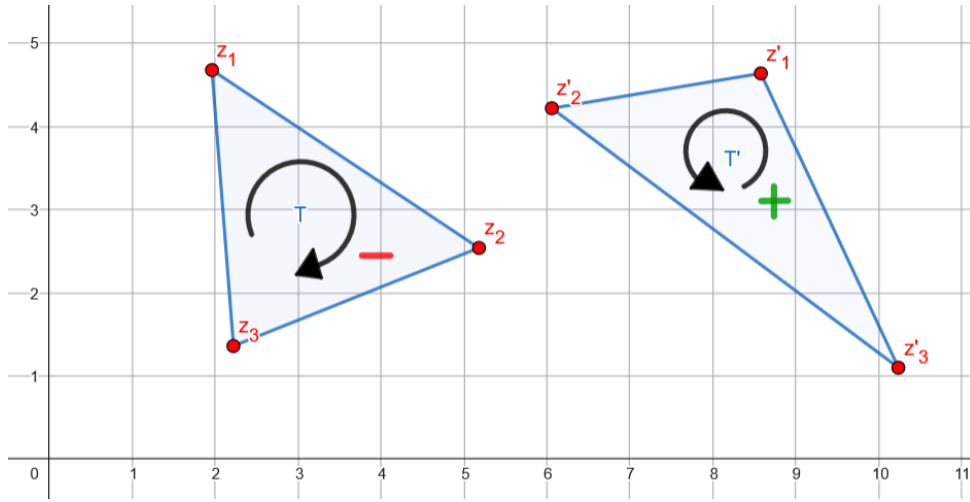
$$\cos(\pi/10) = \frac{\sqrt{5 + \sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$$

$\square$

- (3) Ici, la famille (z_1, z_2, z_3) est dite directe (respectivement indirecte) si les points sont placés dans le sens trigonométrique (respectivement horaire). On dit alors que le triangle formé des ces point est direct (respectivement indirect). Voici un exemple de deux triangle, T direct et T' indirect.

Supposons alors que le triangle formé par (z_1, z_2, z_3) est équilatéral direct. Donc les longueurs des côtés sont égales entre elles et l'angle entre deux côté consécutifs dans le sens direct est $\pi/3$. On a alors :

$$|z_1 - z_3| = |z_2 - z_3| \implies \left| \frac{z_1 - z_3}{z_3 - z_2} \right| = 1 \text{ et } \arg \left(\frac{z_1 - z_3}{z_3 - z_2} \right) = -\frac{\pi}{3} \iff \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} = e^{-i\pi/3}$$



Puisque les côtés considérés se suivent dans le sens indirect, l'angle est négatif. On retrouve alors $-j$ où $j = e^{2i\pi/3}$. On peut donc réécrire :

$$z_1 - z_3 = z_3 j - z_2 j \iff z_1 + z_2 j = z_3(1 + j)$$

Or, l'identité des racines troisièmes de l'unité étant $1 + j + j^2 = 0$, on obtient :

$$(z_1, z_2, z_3) \text{ forme un triangle équilatéral direct} \iff z_1 + z_2 j + z_3 j^2 = 0$$

Remarquons que si on avait supposé le triangle indirect, alors en réarrangeant les indices pour le rendre direct, on aurait obtenu $z_1 + z_3 j + z_2 j^2 = 0$ (car si (z_1, z_2, z_3) est indirecte, (z_1, z_3, z_2) est directe).

Ainsi, on a :

$$(z_1, z_2, z_3) \text{ forme un triangle équilatéral} \iff z_1 + z_2 j + z_3 j^2 = 0 \text{ ou } z_1 + z_3 j + z_2 j^2 = 0$$

En effet, un triangle est soit direct soit indirect, donc l'une des deux identités est vérifiée. En multipliant ces deux quantités, on obtient l'équivalence :

$$\begin{aligned} (z_1, z_2, z_3) \text{ forme un triangle équilatéral} &\iff (z_1 + z_2 j + z_3 j^2)(z_1 + z_3 j + z_2 j^2) = 0 \\ &\iff z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_1 z_2 (j^2 + j) + z_1 z_3 (j^2 + j) + z_2 z_3 (j^2 + 1) = 0 \\ &\iff z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - (z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3) = 0 \\ &\iff z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3 \end{aligned}$$

□

(4) Soit $z \in \mathbb{R}^*$. Alors $z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R}$. Donc $\mathbb{R}^* \subset \Gamma$. Soit donc $z \in \Gamma \setminus \mathbb{R}$. Alors, par définition de Γ :

$$z \in \Gamma \iff z + \frac{1}{z} = \bar{z} + \frac{1}{\bar{z}}$$

En multipliant par z et $\bar{z}$ des deux cotés, on obtient :

$$z^2 \bar{z} + \bar{z} = \bar{z}^2 z + z \iff |z|^2 z - z = |z|^2 \bar{z} - \bar{z} \iff z(|z|^2 - 1) = \bar{z}(|z|^2 - 1)$$

Puisqu'ici $z \notin \mathbb{R} \iff z \neq \bar{z}$, on a $|z|^2 = 1 \iff z \in \mathbb{U}$. Donc $\Gamma \setminus \mathbb{R} \subset \mathbb{U}$. Réciproquement, supposons que $|z| = 1$. Alors $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in [0, 2\pi[$. On a :

$$z + \frac{1}{z} = z + \bar{z} = 2 \cos(\theta) \in \mathbb{R}$$

Donc $\mathbb{U} \subset \Gamma \setminus \mathbb{R}$. On en déduit que $\Gamma = \mathbb{U} \cup \mathbb{R}^*$.

□

(5) Il faut passer en complexe ! Remarquons d'abord que :

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{1}{(2i)^{n-1}} \prod_{k=1}^{n-1} (e^{i\frac{k\pi}{n}} - e^{-i\frac{k\pi}{n}}) = \frac{e^{-i\frac{(n-1)}{2}}}{(2i)^{n-1}} \prod_{k=1}^{n-1} (e^{\frac{2k\pi i}{n}} - 1)$$

On remarque alors que le polynôme $X^n - 1$ se factorise :

$$X^n - 1 = \prod_{k=1}^n (X - e^{\frac{2k\pi i}{n}})$$

En divisant par $X - 1$, on obtient alors :

$$\sum_{k=0}^{n-1} X^k = \prod_{k=1}^{n-1} (X - e^{\frac{2k\pi i}{n}}) \Rightarrow \prod_{k=1}^{n-1} (e^{\frac{2k\pi i}{n}} - 1) = (-1)^{n-1} n$$

De ce fait :

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^n}$$

- (6) On pose $j = \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right)$. On note $a = \sum_{\substack{k=0 \\ k \equiv 0[3]}}^n \binom{n}{k}$, $b = \sum_{\substack{k=0 \\ k \equiv 1[3]}}^n \binom{n}{k}$ et $c = \sum_{\substack{k=0 \\ k \equiv 2[3]}}^n \binom{n}{k}$. Alors on a le système suivant :

$$\begin{cases} (1+1)^n = a + b + c \\ (1+j)^n = a + bj + cj^2 \\ (1+j^2)^n = a + bj^2 + cj \end{cases}$$

En sommant toutes les lignes en remarquant que $1 + j + j^2 = 0$, on obtient que $3a = 2^n + (1 + j)^n + (1 + j^2)^n$. Or, $1 + j = e^{\frac{\pi i}{3}}$ et $1 + j^2 = e^{-\frac{\pi i}{3}}$, on obtient la formule finale :

$$\sum_{\substack{k=0 \\ k \equiv 0[3]}}^n \binom{n}{k} = \frac{2^n + 2 \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{3}$$

- (7) Remarquons que cet équation ne peut être vérifiée si l'un des termes est nul, car l'autre serait non nul (on a soit $z = 1$ soit $z = -1$). On se permet donc de diviser par le membre de gauche. On doit alors résoudre :

$$\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{2n} = 1 \text{ pour } n \in \mathbb{N}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est :

$$\mathcal{S} = \left\{ z \in \mathbb{C}, \exists k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket, \frac{1+z}{1-z} = \exp\left(\frac{ik\pi}{n}\right) \right\}$$

Or, pour $z \in \mathbb{C}$ et $k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{1+z}{1-z} = \exp\left(\frac{ik\pi}{n}\right) &\iff 1+z = \exp\left(\frac{ik\pi}{n}\right) - z \exp\left(\frac{ik\pi}{n}\right) \\ &\iff z \left(1 + \exp\left(\frac{ik\pi}{n}\right)\right) = \exp\left(\frac{ik\pi}{n}\right) - 1 \end{aligned}$$

Pour pouvoir simplifier, il faut que l'on s'assure que $1 + \exp\left(\frac{ik\pi}{n}\right) \neq 0$. Puisque $k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$, cela revient à exclure le cas $k = n$. Or, dans ce cas là, on aurait $\frac{1+z}{1-z} = -1 \iff 1 = -1$, ce qui est absurde. On peut donc extraire ce cas là sans perdre de solutions au problème. Ainsi, on a maintenant $k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket \setminus \{n\}$, et on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1+z}{1-z} = \exp\left(\frac{ik\pi}{n}\right) &\Longleftrightarrow z = \frac{\exp\left(\frac{ik\pi}{n}\right) - 1}{\exp\left(\frac{ik\pi}{n}\right) + 1} = \frac{\exp\left(\frac{ik\pi}{2n}\right) - \exp\left(-\frac{ik\pi}{2n}\right)}{\exp\left(\frac{ik\pi}{2n}\right) + \exp\left(-\frac{ik\pi}{2n}\right)} \\ &\Longleftrightarrow z = i \tan\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \end{aligned}$$

Puisque nous avons raisonné par équivalences, on a parfaitement déterminé l'ensemble des solutions :

$$\mathcal{S} = \left\{ i \tan\left(\frac{k\pi}{2n}\right), k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket \setminus \{n\} \right\}$$

□